

М. ФРАНСОН
С. СЛАНСКИЙ

Когерентность в оптике



COHÉRENCE EN OPTIQUE

par

M. FRANÇON

Professeur à la Faculté
des Sciences de Paris

S. SLANSKY

Chargé de Recherche
au C. N. R. S.

ÉDITIONS
DU CENTRE NATIONAL
DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
15, QUAI ANATOLE — FRANCE — PARIS-VII
1965

М. ФРАНСОН
С. СЛАНСКИЙ

КОГЕРЕНТНОСТЬ В ОПТИКЕ

Перевод с французского
Е. М. ШИФРИНОЙ

Под редакцией
К. С. ШИФРИНА

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1967

Когерентность в оптике, Франсон М., Сланский С., перевод с французского под редакцией К. С. Шифрина, Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», 1967 г.

Свойства частично когерентных волн в последние годы стали интересовать большой круг физиков и инженеров. В оптике это вызвано разработкой и все расширяющимся применением лазерных источников света, в радиофизике и акустике — использованием больших антенн и мощных генераторов звука.

Настоящая книга, написанная известными французскими учеными М. Франсоном и С. Сланским, содержит анализ понятия степени когерентности и элементарное рассмотрение ряда простых задач, связанных с интерференцией и дифракцией частично когерентных волн. Надо надеяться, что она окажет положительное влияние на уровень преподавания в вузах этого сравнительно мало освещенного раздела физики.

Рис. 42. Библ. 60.

М. Франсон, С. Сланский

КОГЕРЕНТНОСТЬ В ОПТИКЕ

М., 1967 г., 80 стр. с илл.

Редактор *Н. А. Райская*

Техн. редактор *Л. А. Пыжова*

Корректор *С. Н. Емельянова*

Сдано в набор 5/VII 1967 г. Подписано к печати 1/XII 1967 г. Бумага 84×108¹/₃₂.
Физ. печ. л. 2,5. Условн. печ. л. 4,2 Уч.-изд. л. 3,64. Тираж 12 700 экз.
Цена 26 коп. Заказ № 800.

Издательство «Наука»

Главная редакция физико-математической литературы
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

Ленинградская типография № 2 имени Евгении Соколовой
Главполиграфпрома Комитета по печати при Совете Министров СССР.
Измайловский проспект, 29.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие к русскому изданию	7
--	---

Глава I

Понятие степени когерентности

§ 1.1. Пространственная и временная когерентность	9
§ 1.2. Соотношение между длиной цуга и шириной спектра излучения, между длиной когерентности и временем когерентности	13
§ 1.3. Волны, испускаемые одним атомом. Изменение комплексной амплитуды колебания за время одного цуга волн	19
§ 1.4. Последовательные цуги волн, излученные одним атомом	25
§ 1.5. Волны, создаваемые двумя различными атомами, излучающими с одной и той же средней частотой ν_0 . . .	27
§ 1.6. Колебания с различными частотами, создаваемые одним атомом	33
§ 1.7. Колебания с одной и той же частотой, приходящие от одного и того же атома	34
§ 1.8. Представление излучения некогерентного источника . .	36
§ 1.9. Корреляция между колебаниями при интерференционных явлениях. Степень частичной когерентности	37

Глава II

Когерентность квазимонохроматического света

§ 2.1. Контрастность интерференционных полос в квазимонохроматическом свете	41
§ 2.2. Степень когерентности колебаний в двух точках, освещенных протяженным источником квазимонохроматического света	43
§ 2.3. Степень когерентности в двух точках, освещенных круговым некогерентным однородным источником	47
§ 2.4. Контраст полос в опыте Юнга	48

§ 2.5. Когерентность в плоскости изображения протяженного источника	52
§ 2.6. Частичная когерентность в поляризационных интерферометрах	54
§ 2.7. Некогерентные протяженные источники когерентного излучения	63

Глава III

Влияние временной когерентности на явления дифракции

§ 3.1. Точечный источник. Явления с одним параметром . . .	66
§ 3.2. Дифракционное изображение щели	69
§ 3.3. Явления с двумя параметрами	72
§ 3.4. Дифракция от круглого отверстия	73
Библиография	77

ПРЕДИСЛОВИЕ К РУССКОМУ ИЗДАНИЮ

Полностью когерентные и полностью некогерентные пучки волн являются идеализированными объектами теоретической физики, которые, строго говоря, никогда не наблюдаются на практике. Поле когерентно возбуждаемой антенны, с одной стороны, и теплового излучения тела, — с другой, могут служить примерами приближения к этим теоретическим моделям. Практически мы всегда имеем дело лишь с частично когерентными пучками, и результат сложения двух таких пучков существенно зависит от их статистических свойств.

Изучение интерференции и дифракции частично когерентных пучков было начато 100 лет назад К. Верде (1865) и продолжено далее А. Майкельсоном (1890), Л. И. Мандельштамом (1911), П. Ван Циттертом (1934), Ф. Цернике (1938), Д. С. Рождественским (1940) и многими другими. Задача состояла в том, чтобы построить общую теорию, из которой полная когерентность и полная некогерентность получались бы как два предельных случая.

В последние годы эта теория и связанные с ней проблемы взаимодействия частично когерентных пучков заинтересовали большой круг физиков и инженеров.

В оптике это вызвано разработкой и применением источников вынужденного излучения света (лазеров). Независимо от состояния возбужденной атомной системы, ее вынужденное излучение под действием приходящей волны по фазе, частоте, направлению распространения и поляризации тождественно падающей. Степень когерентности излучения оказалась при этом значительно выше, чем у тепловых источников света.

В противоположность этому, в радиофизике когерентность полей сложных многоэлементных антенн оказалась вследствие нестабильности источников питания и других случайных причин хуже, чем у полей, создаваемых ранее применявшимися устройствами.

Подобное же положение возникло и в акустике при работе с мощными генераторами звука.

Интерференция и дифракция частично когерентных волн являются важными проблемами и для физики атмосферы и океана. Идеально монохроматическая волна, прошедшая некоторый путь в этих средах со случайным распределением «оптических» констант, становится частично когерентной. Статистические характеристики прошедшего излучения несут в себе ценную информацию о турбулентности и других явлениях в атмосфере и в море. Исследование соответствующих обратных задач представляется весьма важным.

Добавим также, что вопросы, рассматриваемые в настоящей книге, интересны и для голографии — нового, весьма перспективного метода получения изображения путем восстановления волнового фронта дифрагированной волны.

Небольшая книга М. Франсона и С. Сланского, перевод которой предлагается вниманию читателей, представляет, как нам кажется, удачное введение в физику явления. Написанная в доступной форме, она содержит анализ понятия о степени когерентности, а также ряд простых задач, связанных с интерференцией и дифракцией частично когерентных волн. Книга подготавливает читателей к изучению более сложных работ по рассматриваемому вопросу. Для чтения ее достаточно знания общего курса оптики.

Мы надеемся, что содержательная книга М. Франсона и С. Сланского будет интересна не только студентам и инженерам-оптикам, но и учащимся и инженерам других профилей, всем, кто интересуется распространением волн в любых средах.

К. С. Шифрин

ГЛАВА I

ПОНЯТИЕ СТЕПЕНИ КОГЕРЕНТНОСТИ

§ 1.1. Пространственная и временная когерентность

В первом приближении явления физической оптики можно рассматривать, исходя из представления об идеальном источнике света — точечном источнике, излучающем полностью монохроматический свет.

Рассмотрим схему интерферометра Майкельсона (рис. 1). Идеальный источник света (точечный источник, излучающий монохроматический свет) находится в фокусе объектива O , и интерферометр освещен параллельным пучком. Пучок, отраженный полупрозрачным зеркалом G , нормален к зеркалу M_1 , а пучок, проходящий сквозь G , нормален к зеркалу M_2 . Наклоним слегка зеркало M_2 таким образом, чтобы M_2' — изображение M_2 в полупрозрачном зеркале G — образовало бы очень малый угол с M_1 . Все происходит так, как если бы мы наблюдали полосы равной толщины в слое воздуха переменной толщины, заключенном между M_1 и M_2' .

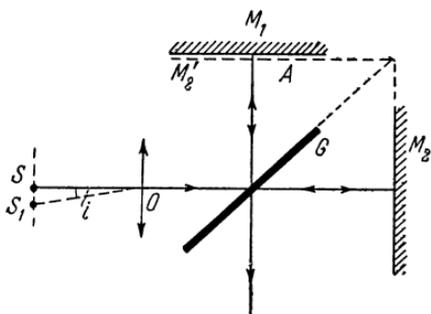


Рис. 1.

В области A , где толщина слоя равна e , разность хода лучей равна $\delta = 2e$. Если λ — длина волны монохроматического света, излученного точечным источником S , то

с точностью до постоянного множителя интенсивность света в A равна

$$I = \cos^2 \frac{\pi \delta}{\lambda} = \cos^2 \frac{\varphi}{2} = \cos^2 \frac{2\pi e}{\lambda}. \quad (1.1)$$

Здесь φ — разность фаз, соответствующая разности хода δ^*).

Так как толщина слоя e переменна, то мы будем наблюдать ряд интерференционных полос, параллельных ребру двугранного угла между плоскостями M_1 и M'_2 .

Пусть I_1 — интенсивность светлых полос, а I_2 — интенсивность темных. Обозначим контраст полос через γ и зададим его следующим образом:

$$\gamma = \frac{I_1 - I_2}{I_1}. \quad (1.2)$$

Этот параметр определяет видимость интерференционной картины.

Соотношение (1.1) показывает, что I_2 равна нулю каждый раз, когда толщина e равна нечетному числу $\lambda/4$. Тогда темные полосы становятся черными и $\gamma = 1$; в этом случае контраст максимален. В схеме, изображенной на рис. 1, контраст равен единице при любом расстоянии между M_1 и M'_2 . Однако опыт показывает, что это никогда не наблюдается по следующим двум причинам, имеющим принципиальный характер: источник S всегда имеет какую-то протяженность и излучаемый им свет не вполне монохроматичен. В самом деле, нетрудно показать, что при увеличении протяженности источника контраст между полосами уменьшается.

Пусть S_1 — точка протяженного источника с центром в S . Отрезок S_1S виден из точки O под углом i . Для точки S_1 источника разность хода в A равна $\delta = 2e \cos i$. Следовательно, как разность хода δ , так и разность фаз φ неодинаковы для различных точек протяженного источника. Поскольку изменяется разность фаз φ , то и интенсивность I , создаваемая в A точкой s_1 протяженного источника, также будет изменяться

*) Формула (1.1) вытекает из векторного правила сложения гармонических колебаний. Модуль амплитуды суммарного колебания A определяется из теоремы косинусов. Если принять амплитуды обоих слагаемых колебаний равными a , то для A^2 имеем $A^2 = 2a^2 + 2a^2 \cos \varphi = 4a^2 \cos^2 \frac{\varphi}{2}$. На описываемом здесь приборе А. Майкельсон (1881) осуществил свой знаменитый опыт по определению влияния движения Земли на скорость света. (*Прим. ред.*)

в зависимости от положения этой точки. Если для какой-то определенной точки источника S получается нулевой минимум в A , то для других точек источника это будет не так. Различия в разности фаз φ для разных точек источника приведут к уменьшению контраста между полосами.

Если изменения φ достаточно малы, то они могут повлечь за собой лишь пренебрежимо малые изменения интенсивности, — в этом случае имеет место пространственная когерентность. Большие изменения φ могут привести к столь большим изменениям I , что контраст упадет практически до нуля. Тогда полосы становятся неразличимыми — имеет место пространственная некогерентность. Рассмотрение промежуточных случаев позволяет ввести определение различных степеней частичной когерентности в случае пространственной когерентности.

Кроме того, электромагнитные волны не бесконечны. Они излучаются в виде цугов конечной длины. Поскольку цуг имеет конечную длину, атом излучает не одну какую-нибудь частоту, а целый спектр частот, ширина которого тем больше, чем меньше длина цуга. Это также влечет за собой уменьшение контраста между полосами, и в таком случае говорят, что имеет место явление временной, или хроматической, когерентности.

Подобные явления можно изучать, вводя либо длину цугов волн, либо ширину спектра частот, т. е. степень монохроматичности излучения источника.

Рассмотрим сначала первый случай и возвратимся к предыдущему опыту, приняв, что диаметр источника S очень мал. Будем постепенно отдалять одно из зеркал интерферометра, чтобы увеличить разность хода. Можно заметить, что контраст между полосами уменьшается даже тогда, когда диаметр источника настолько мал, что не влияет на контраст полос. В данном случае ухудшение видимости связано не с увеличением диаметра источника, а с конечной длиной волновых цугов, испускаемых атомами источника. Эти цуги приходят через какие-то интервалы времени, но за время наблюдения их проходит очень много. При попадании в интерферометр каждый цуг, например цуг A , разделяется полупрозрачным зеркалом G на два (рис. 2). Установим такую разность хода между путями 1 и 2 , чтобы она была больше длины цугов волн. Если достаточно далеко удалить зеркало M_2 , то в момент, когда цуг A'_1 , шедший путем 1 , придет в P , другой цуг будет находиться лишь в A'_2 . Эти два цуга не встретятся

и не смогут интерферировать. Цуги, налагающиеся друг на друга в точке P , происходят от двух разных падающих цугов, испущенных в разные моменты времени, например в моменты t и $t + \theta$.

Рассмотрим сначала случай, изображенный на рис. 2, где θ гораздо больше длительности цуга τ .

За время, необходимое для наблюдения, проходит множество цугов, причем моменты их прохождения распределены

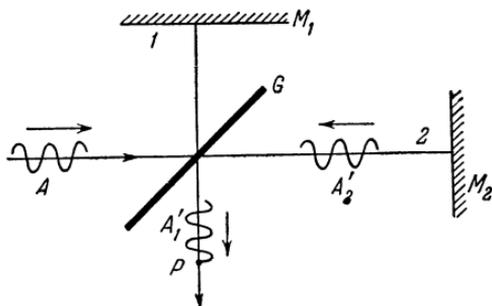


Рис. 2.

случайно. Если рассматривать все цуги и учитывать, что разность фаз между любыми двумя цугами принимает всевозможные значения, то ясно, что явление интерференции наблюдаться не будет.

Картина изменится, если разность хода уменьшится, так как при этом промежуток времени θ также уменьшится. При θ порядка τ оба цуга, происходящие из одного начального, частично перекрываются. Между этими цугами существует «корреляция», и она сохраняется для всех цугов, приходящих в P . Появляются интерференционные полосы с большим или меньшим контрастом и возникает частичная когерентность пучков 1 и 2. Если разность хода настолько мала, что θ значительно меньше τ , то полосы оказываются очень контрастными.

Видимость полос зависит от степени частичной когерентности — в данном случае временной когерентности. Мы вводим, таким образом, время когерентности, связанное с τ , и длину когерентности, связанную с длиной цугов.

Если мы обратимся теперь ко второму случаю, то увидим, что согласно (1.1) интенсивность есть функция длины волны. Каждой длине волны соответствует определенная интенсивность света, наблюдаемого в A (см. рис. 1).

Если для длины волны λ мы наблюдаем нулевой минимум в A , то для других длин волн картина оказывается уже иной и контраст между полосами уменьшится. Видимость полос связана с хроматизмом источника, т. е. с временной когерентностью, причем время когерентности тем больше, чем уже спектр частот.

Точно так же обстоит дело и при явлениях дифракции (рис. 3). Цуги волн, выходящие в один и тот же момент времени из двух точек волновой поверхности M_1 и M_2 , приходят в точку P' в разное время. Если разность хода M_2H значительно больше длины цугов, то колебания, пришедшие в P' из точек M_1 и M_2 , будут некогерентны. Если именно

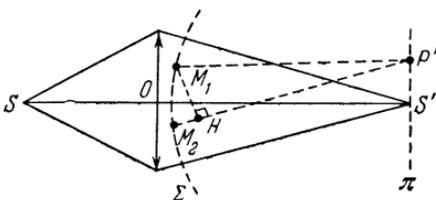


Рис. 3.

так обстоит дело для большинства элементов поверхности волны Σ , то дифракционные полосы в точке P' не наблюдаются. В точку S' , являющуюся геометрическим изображением точечного источника S , все колебания приходят в одинаковой фазе. Если удаляться от S' , оставаясь в плоскости π , то мы увидим, что колебания, приходящие от различных точек поверхности Σ , окажутся уже не в фазе. Когерентность уменьшается. Если продолжать удаляться от S' , то наступит момент, когда колебания станут некогерентными и дифракционные полосы различить уже будет нельзя. Мы получим равномерное гало.

§ 1.2. Соотношение между длиной цуга и шириной спектра излучения, между длиной когерентности и временем когерентности

Опыт показывает, что когерентность двух способных интерферировать пучков связана с их длительностью, а следовательно, и с длиной цугов волн. Но длина цугов определяет ширину спектра излучения атомов: очень медленно затухающий цуг близок к синусоидальному и, следовательно, к монохроматическому колебанию. Как мы видели, в этом случае интерференционные полосы хорошо различимы даже при большой разности хода (размеры источника предполагаются пренебрежимо малыми). Быстро затухающий цуг соответствует негармоническому колебанию и, следовательно, не

монохроматическому излучению. Различимость полос уменьшается при увеличении разности хода.

Здесь следует ввести понятие времени когерентности, связанного с длительностью цугов, и длины когерентности, связанной с длиной цугов. Для этого найдем вначале соотношение между длиной цугов и шириной спектра излучения. Пусть функция $F(t)$ описывает колебательное движение, вызванное прохождением одного-единственного цуга волн в определенной точке и в определенный момент времени t .

Предположим, что $F = 0$ для $|t| \geq \tau$, где τ — длительность цуга (постоянная затухания).

Согласно теореме Фурье любую конечную и интегрируемую функцию можно представить в виде непрерывной суммы бесконечного числа синусоидальных компонент *).

Поэтому можно рассматривать колебание $F(t)$, вызванное прохождением одного цуга волн, как суперпозицию монохроматических колебаний с различными частотами ν :

$$F(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\nu) e^{i2\pi\nu t} d\nu, \quad (1.3)$$

где $f(\nu)$ дает распределение по амплитуде монохроматических составляющих $F(t)$. Распределение этих составляющих по энергиям дается выражением $|f(\nu)|^2$. Согласно свойствам преобразования Фурье мы можем написать

$$f(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(t) e^{-i2\pi\nu t} dt, \quad (1.4)$$

что позволяет вычислить $f(\nu)$ — спектр $F(t)$. В дальнейшем мы будем рассматривать лишь узкие спектры, для которых $|f(\nu)|$ имеет заметное значение только в интервале частот, малом по сравнению со средней частотой (квазимонохроматический свет). Тем не менее для общности мы сохраним пределы $(-\infty, +\infty)$ в интеграле (1.3).

*) Строго говоря, функция удовлетворяет теореме Фурье, если она в любом конечном промежутке удовлетворяет так называемым условиям Дирихле и абсолютно интегрируема в промежутке $(-\infty, +\infty)$. Подробнее см. Г. М. Фихтенгольц, «Курс дифференциального и интегрального исчисления», т. III, Физматгиз, 1960 и В. И. Смирнов, «Курс высшей математики», т. II, Физматгиз, 1962. (Прим. ред.)

В качестве первого примера рассмотрим случай, когда длительность всех цугов волн одинакова и равна τ . В течение этого промежутка времени $F(t)$ — простое гармоническое колебание частоты ν_0 , т. е.

$$F(t) = f_0 e^{i2\pi\nu_0 t}, \quad (1.5)$$

где f_0 — постоянная. $F(t)$ определяется выражением (1.5), когда t заключено между $-\frac{\tau}{2}$ и $+\frac{\tau}{2}$, и $F(t) = 0$, когда t находится вне этого интервала. Иными словами,

$$F(t) = f_0 e^{i2\pi\nu_0 t} \quad \text{для} \quad |t| \leq \frac{\tau}{2},$$

$$F(t) = 0 \quad \text{для} \quad |t| > \frac{\tau}{2}.$$

Действительная часть функции $F(t)$, т. е. $\text{Re}[F(t)]$, изображена

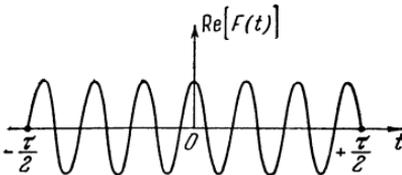


Рис. 4.

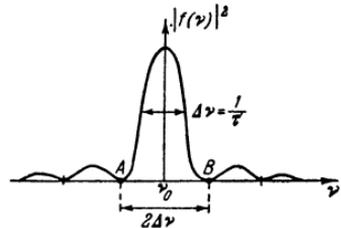


Рис. 5.

на рис. 4. Согласно (1.4) спектр $F(t)$ дается выражением

$$f(\nu) = f_0 \int_{-\frac{\tau}{2}}^{+\frac{\tau}{2}} \exp[-i2\pi(\nu - \nu_0)t] dt = f_0 \frac{\sin[\pi(\nu - \nu_0)\tau]}{\pi(\nu - \nu_0)\tau} \tau. \quad (1.6)$$

а распределение энергии по частоте — выражением

$$|f(\nu)|^2 = f_0^2 \left\{ \frac{\sin[\pi(\nu - \nu_0)\tau]}{\pi(\nu - \nu_0)\tau} \right\}^2 \tau^2. \quad (1.7)$$

Зависимость $|f(\nu)|^2$ от ν представлена на рис. 5. Интервал частот между точками A и B , расположенными симметрично по отношению к ν_0 , равен

$$\nu - \nu_0 = \pm \frac{1}{\tau}.$$

Охарактеризуем ширину $\Delta\nu$ спектральной полосы половиной интервала AB . Имеем

$$\Delta\nu = \frac{1}{\tau}. \quad (1.8)$$

Ширина спектральной полосы равна обратной величине длительности цуга. Время τ называется *временем когерентности*. Положим

$$l = c\tau, \quad (1.9)$$

где c — скорость света. Учитывая, что $\lambda = c/\nu$, имеем

$$|\Delta\lambda| = \frac{c \Delta\nu}{\nu^2} = \Delta\nu \frac{\lambda^2}{c};$$

если λ_0 — средняя длина волны, соответствующая ν_0 , то

$$l = \frac{c}{\Delta\nu} = \frac{\lambda_0^2}{\Delta\lambda}. \quad (1.10)$$

Длина l называется *длиной когерентности*.

Известно, что при точечном источнике монохроматического света полосы видны только тогда, когда разность хода δ не превышает некоторого определенного значения. Допустим, что излучение источника лежит в небольшом спектральном интервале $\Delta\lambda$. Для получения контрастных интерференционных полос, нужно чтобы изменение порядка интерференции *) $p = \delta/\lambda$, связанное с изменением $\Delta\lambda$ длины волны, было гораздо меньше 1. Мы должны иметь, таким образом,

$$\Delta p = \frac{\delta}{\lambda_0^2} \Delta\lambda \ll 1.$$

Следовательно, при пользовании источником, излучающим в узком спектральном интервале со средней длиной волны λ_0 , нужно, чтобы разность хода между обоими интерферирующими колебаниями удовлетворяла условию

$$\delta \ll \frac{\lambda_0^2}{\Delta\lambda}. \quad (1.11)$$

Сравнивая (1.9), (1.10) и (1.11), получаем

$$\delta \ll l = c\tau. \quad (1.12)$$

Для получения значительной контрастности полос необхо-

*) Порядком интерференции двух пучков света с разностью хода δ называется величина $p = \delta/\lambda$. Подробнее см. Р. Дитчберн, «Физическая оптика», «Наука», 1965. (Прим. ред.)

димо, чтобы разность хода δ была мала по сравнению с длиной когерентности.

В качестве второго примера рассмотрим затухающие гармонические колебания. Цуги волн имеют одинаковую постоянную затухания τ , и функция $F(t)$ имеет вид

$$F(t) = f_0 e^{i2\pi\nu_0 t} e^{-t/\tau} \text{ для } t \geq 0; F(t) = 0 \text{ для } t < 0. \quad (1.13)$$

Здесь f_0 — некоторая постоянная, τ — постоянная затухания. Действительная часть $\text{Re}[F(t)]$ функции $F(t)$ представлена

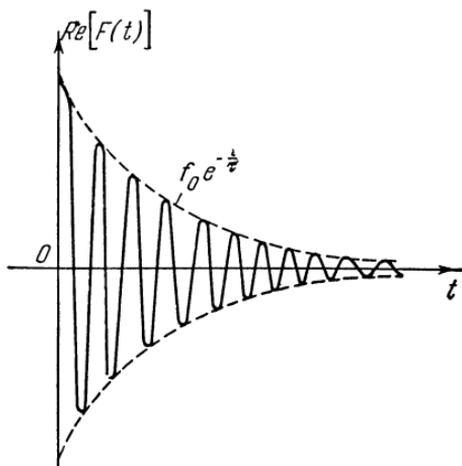


Рис. 6.

на рис. 6. Рассмотрим спектр частот вблизи средней частоты ν_0 . Из соотношения (1.4) имеем

$$f(\nu) = f_0 \int_0^{+\infty} \exp \left[-i2\pi(\nu - \nu_0)t - \frac{t}{\tau} \right] dt, \quad (1.14)$$

откуда

$$f(\nu) = \frac{f_0}{\frac{1}{\tau} + i2\pi(\nu - \nu_0)}. \quad (1.15)$$

Положим

$$\rho e^{i\theta} = \frac{1}{\tau} + i2\pi(\nu - \nu_0). \quad (1.16)$$

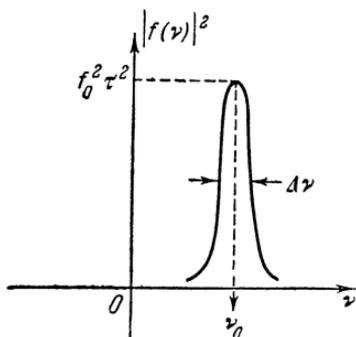
Амплитуду f_0/ρ функции $f(\nu)$ можно определить из выражения

$$\frac{1}{\rho^2} = \frac{1}{\frac{1}{\tau^2} + 4\pi^2(\nu - \nu_0)^2}, \quad (1.17)$$

откуда для распределения энергии по частоте вблизи ν_0 имеем

$$|f(\nu)|^2 = \frac{f_0^2}{\rho^2} = \frac{f_0^2}{\frac{1}{\tau^2} + 4\pi^2(\nu - \nu_0)^2}. \quad (1.18)$$

Охарактеризуем ширину спектральной полосы $\Delta\nu$ интервалом частот, соответствующим половине максимальной ординаты $f_0^2\tau^2$ (рис. 7). Имеем



$$\frac{f_0^2}{\frac{1}{\tau^2} + 4\pi^2(\nu - \nu_0)^2} = \frac{f_0^2\tau^2}{2},$$

откуда

$$(\nu - \nu_0)^2 = \left(\frac{\Delta\nu}{2}\right)^2 = \frac{1}{4\pi^2\tau^2}$$

или

$$\Delta\nu = \frac{1}{\pi\tau}. \quad (1.19)$$

Рис. 7.

Итак, мы получили результат, аналогичный предыдущему: ширина спектральной полосы обратно пропорциональна постоянной затухания (времени когерентности), иначе говоря, средней длине цугов (длине когерентности).

Определим порядок величины длины когерентности $l = c\tau$. Из (1.9), (1.10) и (1.19) имеем

$$l = c\tau = \frac{c}{\pi\Delta\nu} = \frac{\lambda_0^2}{\pi\Delta\lambda}.$$

Для линии $\lambda_0 = 0,546$ мк со спектральной шириной $\Delta\lambda = 300$ Å (зеленая линия ртутной лампы марки Филипс НР 80) получим

$$l = \frac{(0,546)^2}{0,03 \cdot 3,14} = 3,2 \text{ мк}.$$

В обоих примерах, рассмотренных выше, мы считали, что все цуги волн, испущенные источником, идентичны, что не имеет места в действительности.

Атомы возмущают друг друга и излучаемые ими цуги волн изменяются хаотическим образом. Кроме того, спектральные линии уширяются из-за других явлений, например вследствие эффекта Доплера. Поэтому можно определить лишь

средние значения для продолжительности цугов и спектральной ширины $\Delta\nu$.

Тем не менее эти средние значения удовлетворяют соотношениям типа (1.8) или (1.19).

§ 1.3. Волны, испускаемые одним атомом. Изменение комплексной амплитуды колебания за время одного цуга волн

Монохроматическую волну, характеризующуюся частотой ν_0 , можно записать в виде

$$F(t) = ae^{i2\pi\nu_0 t}. \quad (1.20)$$

Функция $F(t)$ описывает, например, электрическое поле; пусть волна распространяется в направлении OX , тогда из волнового уравнения мы находим для a следующее выражение:

$$a = f_0 \exp \left[i \left(\theta - \frac{2\pi\nu_0 x}{v} \right) \right]. \quad (1.21)$$

Здесь v — скорость распространения волны, f_0 и θ — две произвольные постоянные, f_0 — амплитуда, а θ — фаза колебания. Для $F(t)$ получаем теперь общее выражение:

$$F(t) = f_0 \exp \left\{ i \left[2\pi\nu_0 \left(t - \frac{x}{v} \right) + \theta \right] \right\}. \quad (1.22)$$

Колебания, испускаемые атомами, не могут всегда (или вечно) оставаться синусоидальными. Действительно, колебания атомов прерываются или возмущаются из-за столкновений, либо затухают в результате потери энергии вследствие излучения.

Прежде всего можно предположить, что колебание, испускаемое атомом, описывается соотношением (1.22), но прерывается после некоторого времени τ . Тогда следует допустить, что атом излучает ряд цугов, подобных цугу, изображенному на рис. 4; при переходе от одного цуга к другому они изменяются нерегулярным образом.

Если предположить, что колебание, испускаемое атомом, затухает, то

$$F(t) = f_0 \exp \left\{ i \left[2\pi\nu_0 \left(t - \frac{x}{v} \right) + \theta \right] \right\} \exp \left(-\frac{t}{\tau} \right). \quad (1.23)$$

При переходе от одного цуга к другому фаза θ меняется совершенно нерегулярным образом.

В общем случае можно, следовательно, считать, что любая волна образована монохроматическими колебаниями с различными частотами. Каждая монохроматическая составляющая описывается соотношением (1.22) или, в упрощенном виде, выражением $f_0 e^{i2\pi\nu t}$. Суммарное колебание можно записать согласно (1.3) в виде

$$F(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\nu) e^{i2\pi\nu t} d\nu. \quad (1.24)$$

Вводя среднюю частоту ν_0 , вокруг которой распределяются частоты ν , получаем

$$F(t) = \exp[i2\pi\nu_0 t] \int_{-\infty}^{+\infty} f(\nu) \exp[i2\pi(\nu - \nu_0)t] d\nu. \quad (1.25)$$

Пусть

$$a(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\nu) \exp[i2\pi(\nu - \nu_0)t] d\nu, \quad (1.26)$$

где $a(t)$ — в общем случае комплексное число вида $A(t) e^{i\Phi(t)}$. Тогда получим

$$F(t) = a(t) e^{i2\pi\nu_0 t}. \quad (1.27)$$

Это выражение описывает колебание, вызванное проходящим дугом волн.

Колебание, описываемое (1.27), можно считать монохроматическим колебанием с частотой, равной средней частоте ν_0 , и с переменной амплитудой $a(t)$. $a(t)$ — это мгновенное значение комплексной амплитуды колебания.

Предположим, что $f(\nu)$, т. е. спектр $F(t)$, отличен от нуля только при значениях ν , близких к ν_0 . Интеграл (1.26) представляет суперпозицию гармонических составляющих с частотами $(\nu - \nu_0)$, т. е. низкочастотных составляющих. Иными словами, если интервал $\Delta\nu$, внутри которого $f(\nu)$ отлично от нуля, мал по сравнению со средней частотой ν_0 , то $\exp[i2\pi(\nu - \nu_0)t]$ будет изменяться во времени медленнее, чем $\exp[i2\pi\nu_0 t]$. Излученный свет окажется квазимонохроматическим. В выражении (1.27) изменения $a(t)$ во времени медленнее изменений колебательного члена $\exp[i2\pi\nu_0 t]$.

Известно, что ширина $\Delta\nu$, представляющая собой ширину спектра излучения атома, связана с временем когерентности,

т. е. с протяженностью цугов волн. Ширина $\Delta\nu$ равна по порядку величины $1/\tau$. Рассмотрим излучение со спектральной шириной $\Delta\lambda = 0,5 \cdot 10^{-2} \text{ \AA}$, что соответствует очень тонкой линии. Имеем

$$\tau = \frac{\lambda^2}{c \Delta\lambda},$$

и для $\lambda = 0,5 \text{ мк}$ получим $\tau = 1,66 \cdot 10^{-9} \text{ сек.}$ Так как период T колебаний равен $T = \lambda/c = 1,66 \cdot 10^{-15} \text{ сек.}$, то $\tau/T \approx 10^6$.

Следовательно, за время прохождения одного цуга волн, т. е. за время τ , в течение которого комплексная амплитуда $a(t)$ меняется сравнительно медленно, осуществляется миллион колебаний. Следует, однако, заметить, что, если изменения $a(t)$ медленны в масштабе периода колебаний, то они происходят необыкновенно быстро в масштабе времени, требуемого для наблюдения.

Представим в комплексной плоскости комплексную амплитуду $a(t)$ излучения, испускаемого атомом, для различных типов колебаний. В случае монохроматического колебания (1.22) комплексная амплитуда $a(t)$ представлена некой точкой M (рис. 8, *a*). На рис. 8, *б* дано пространственное или временное представление действительной части функции $F(t)$, а на рис. (8, *в*) — спектр функции $F(t)$. Если колебание неограничено, то для его спектра характерна одна-единственная частота ν_0 .

Та же последовательность изображений принята на рис. 9 и 11. Рис. 9, *a*, 9, *б* и 9, *в* относятся к колебанию типа (1.22), но ограниченному.

В комплексной плоскости амплитуда по-прежнему будет представлена некой точкой M в течение всего времени излучения волны, если промежутки времени τ крайне малы по сравнению с временем, необходимым для наблюдения. Следовательно, за время наблюдения комплексная амплитуда $a(t)$ примет множество значений, показанных на рис. 10 точками M_1, M_2, M_3, \dots , распределенными случайным образом, и поэтому будет наблюдаться лишь какой-то средний эффект, обусловленный отдельными значениями $a(t)$.

Рассмотрим колебания типа (1.23). Сравнивая (1.27) и (1.23), получаем, опуская в экспоненте $2\pi\nu_0 x/v$, выражение

$$a(t) = f_0 e^{-\frac{t}{\tau}} e^{i\theta}. \quad (1.28)$$

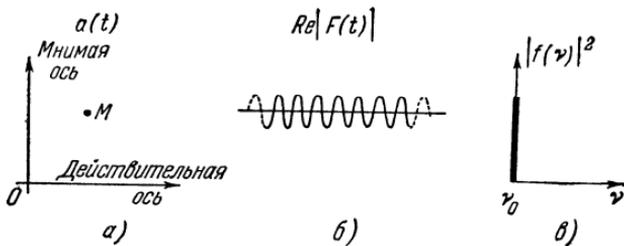


Рис. 8.

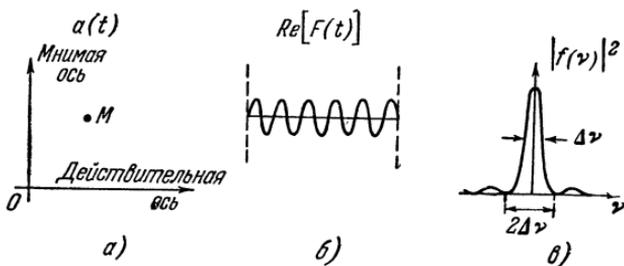


Рис. 9.

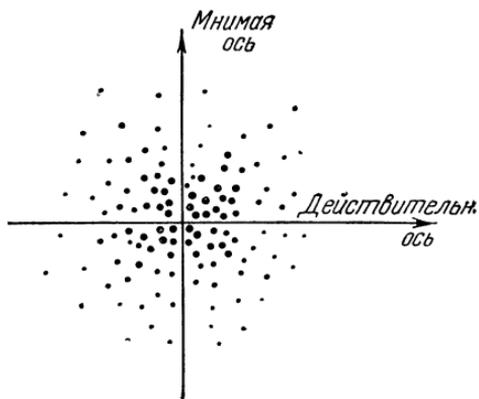


Рис. 10.

В комплексной плоскости (рис. 11, а) $a(t)$ приближается к точке O , двигаясь по некоторой закрепленной прямой MO (θ — постоянная для данного цуга волн).

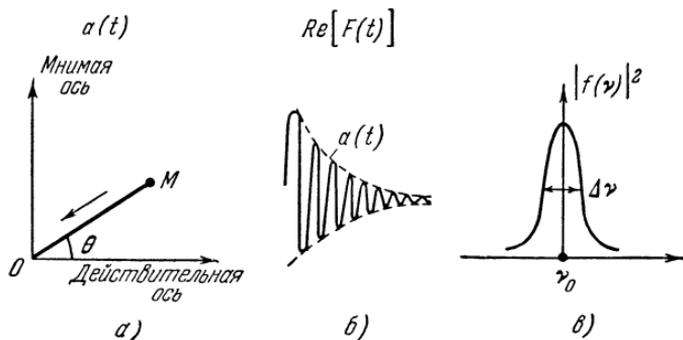


Рис. 11.

За время наблюдения атом излучает весьма большое число цугов. Каждому цугу соответствует прямая в комплексной плоскости. Фазы, соответствующие различным цугам, никак

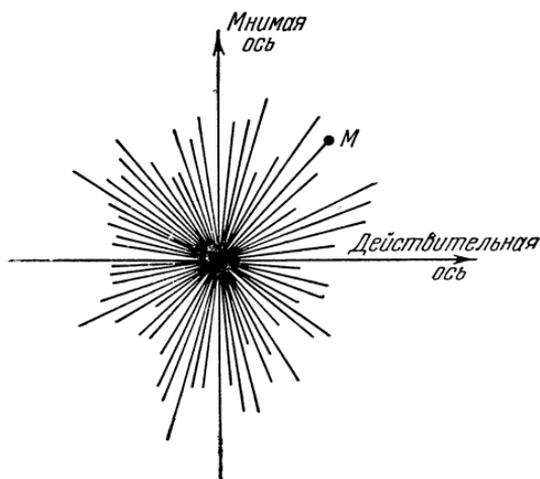


Рис. 12.

между собой не связаны. Это изображено на рис. 12. За время наблюдения можно заметить лишь усредненный эффект, создаваемый всеми значениями $a(t)$.

Если учитывать эффект Допплера, то появляется изменение частоты $\delta\nu$, обязанное своим происхождением движению

атома со скоростью v по отношению к наблюдателю. Имеем

$$\frac{\delta v}{v} = \frac{v}{c}.$$

Наблюдателю представляется, согласно (1.27), что атом излучает колебание вида

$$F(t) = a(t) \exp [i2\pi (v_0 + \delta v) t] = a_0(t) \exp [i2\pi v_0 t]. \quad (1.29)$$

В случае затухающих колебаний (1.28) имеем

$$a_0(t) = f_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \exp [i(\theta + 2\pi \delta v t)]. \quad (1.30)$$

Фаза изменяется во времени, и в комплексной плоскости мы получаем кривую, приведенную на рис. 13. Наконец,

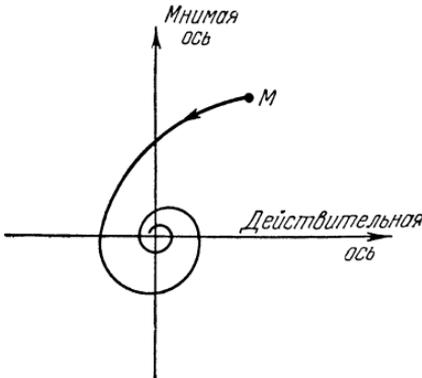


Рис. 13.

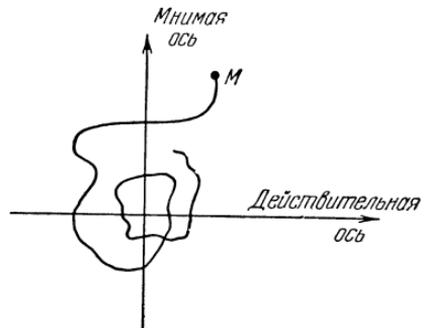


Рис. 14.

в общем случае, когда мы учтем возмущение от соседних атомов, комплексная амплитуда $a(t)$ будет изменяться сложным образом и мы получим кривую, подобную кривой на рис. 14.

Как и в предыдущих случаях, изменения амплитуды, изображенные на рис. 14, происходят за время прохождения цуга. Число цугов, излученных за время наблюдения, очень велико, и мы имеем поэтому множество кривых, подобных тем, которые изображены на рис. 14, но все они никак не связаны друг с другом.

За время наблюдения амплитуда $a(t)$ меняется весьма быстро, и мы можем заметить лишь усредненный эффект, создаваемый различными значениями $a(t)$.

§ 1.4. Последовательные цуги волн, излученные одним атомом

Один цуг волн, излученный одним атомом, можно охарактеризовать комплексной функцией $a(t)$, изменения которой за время прохождения одного цуга изображены на рис. 14. Промежутки времени τ чрезвычайно малы по сравнению с временем, необходимым для наблюдения. Следовательно, за время наблюдения атом излучает большое число цугов, не связанных по фазе.

Предположим, что атом излучает цуги волн $F_1(t)$, $F_2(t)$, ... в случайно распределенные моменты времени t_1 , t_2 , ...

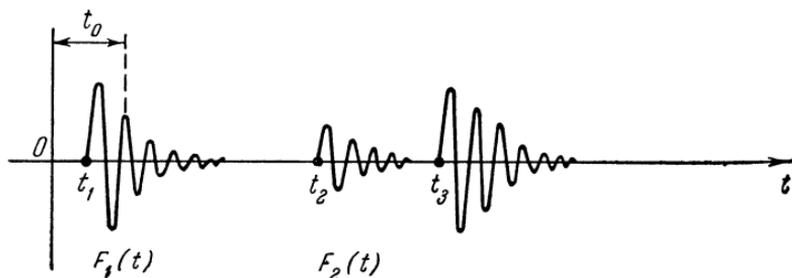


Рис. 15.

(рис. 15). Цуг $F_1(t)$, излученный в момент времени t_1 , будет представлен выражением $F_1(t_0 - t_1)$ в момент времени t_0 . То же относится и к другим цугам, и суммарное колебание в момент времени t_0 можно записать в виде

$$V(t_0) = F_1(t_0 - t_1) + F_2(t_0 - t_2) + \dots \quad (1.31)$$

Эти цуги могут иметь любую форму и продолжительность τ_1 , τ_2 , ... Фазы каждого цуга неодинаковы (см. рис. 13 и 14), и между фазами различных цугов нет никакой связи.

Заменив для каждого цуга t_0 на t , мы в соответствии с (1.3) и (1.31) получим

$$F_1(t - t_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\nu) \exp[i2\pi\nu(t - t_1)] d\nu, \quad (1.32)$$

откуда

$$V(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} [f_1(\nu) e^{-i2\pi\nu t_1} + f_2(\nu) e^{-i2\pi\nu t_2} + \dots] e^{i2\pi\nu t} d\nu. \quad (1.33)$$

Если положить

$$v(\nu) = f_1(\nu) e^{-i2\pi\nu t_1} + \dots, \quad (1.34)$$

то *)

$$V(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} v(\nu) e^{i2\pi\nu t} d\nu, \quad (1.35)$$

где $v(\nu)$ — спектр $V(t)$.

Выделяя среднюю частоту ν_0 , мы можем переписать (1.33) в виде

$$V(t) = e^{i2\pi\nu_0 t} \int_{-\infty}^{+\infty} [f_1(\nu) \exp[-i2\pi\nu t_1] + \dots] \times \\ \times \exp[i2\pi(\nu - \nu_0)t] d\nu. \quad (1.36)$$

Положим

$$a(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} [f_1(\nu) \exp[-i2\pi\nu t_1] + \dots] \exp[i2\pi(\nu - \nu_0)t] d\nu, \quad (1.37)$$

$$a(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} v(\nu) \exp[i2\pi(\nu - \nu_0)t] d\nu. \quad (1.38)$$

Тогда

$$V(t) = a(t) \exp[i2\pi\nu_0 t]. \quad (1.39)$$

Это выражение идентично выражению (1.27), но оно описывает явление для последовательности большого числа цугов волн.

Амплитуда $a(t)$ представляет собой теперь комплексную амплитуду результирующей большого числа последовательных цугов. Если все члены, входящие в $a(t)$, отличаются от нуля только для значений ν , близких к ν_0 , то $a(t)$ изменяется медленно по сравнению с изменением колебательного члена $e^{i2\pi\nu_0 t}$ в выражении (1.39), так же как и в случае одного цуга. Но, разумеется, изменения $a(t)$ крайне быстры по сравнению с нашими возможностями наблюдения.

За время одного наблюдения $a(t)$ описывает большое количество кривых типа, изображенного на рис. 14, и в конечном счете получается весьма сложная кривая.

*) Как и для $|f(\nu)|$, мы делаем допущение, что $|v(\nu)|$ практически пренебрежимо мало вне области частот (мы рассматриваем только положительные частоты), малой по сравнению со средней частотой.

Приемное устройство может отметить лишь усредненный эффект, создаваемый быстрой последовательностью значений $a(t)$. Если $2T$ — время, требуемое для наблюдения, то для среднего значения $a(t)$ или $V(t)$ получим

$$\overline{a(t)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} a(t) dt = 0,$$

так как в комплексной плоскости для каждой величины $a(t)$ всегда можно найти величину с противоположным знаком.

Обычно приемник — глаз или фотоэлектрический регистратор — фиксирует лишь средний квадрат амплитуды. Именно эта величина и характеризует интенсивность явления. Мгновенное значение комплексной амплитуды $a(t)$ соответствует энергии $|a(t)|^2$, т. е. квадрату модуля величины $a(t)$. Для приемного устройства интенсивность явления, следовательно, характеризуется средней величиной, т. е.

$$\begin{aligned} \overline{|a(t)|^2} &= \overline{a(t) a^*(t)} = \\ &= \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} |a(t)|^2 dt \approx \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{+\infty} |a(t)|^2 dt. \end{aligned} \quad (1.40)$$

§ 1.5. Волны, создаваемые двумя различными атомами, излучающими с одной и той же средней частотой ν_0

Рассмотрим два атома M_1 и M_2 (рис. 16) и будем изучать создаваемые ими колебания, приходящие в одну и ту же точку P .

В соответствии с формулой (1.39) колебания V_1 и V_2 , создаваемые этими атомами, можно записать в виде

$$\begin{aligned} V_1(t) &= a_1(t) e^{i2\pi\nu_0 t}, \\ V_2(t) &= a_2(t) e^{i2\pi\nu_0 t}. \end{aligned} \quad (1.41)$$

Частота ν_0 одинакова для V_1 и V_2 , так как оба атома излучают с одной и той же средней частотой. Мы начинаем рассматривать волны V_1 и V_2 в тот момент, когда они покидают оба атома. Если θ_1 и θ_2 — промежутки времени, за которые волны совершили пути M_1P и M_2P соответственно, то

$$\theta_1 = \frac{M_1P}{v}, \quad \theta_2 = \frac{M_2P}{v}, \quad (1.42)$$

где v — скорость света. Колебание, пришедшее от атома M_1 в точку P в момент времени t , совпадает с колебанием в M_1 в момент времени $t - \theta_1$. Это колебание можно записать

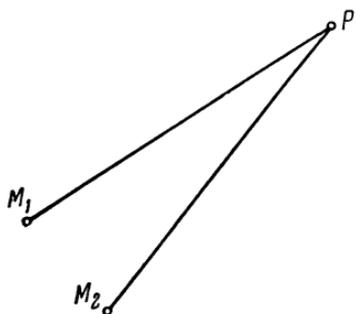


Рис. 16.

в виде $V_1(t - \theta_1)$ или $a_1(t - \theta_1)$. То же относится и к колебанию, пришедшему от атома M_2 в P . Поэтому колебание в точке P в момент времени t можно записать следующим образом *):

$$V(t) = V_1(t - \theta_1) + V_2(t - \theta_2). \quad (1.43)$$

Приемное устройство чувствительно к среднему значению величины $|V_1 + V_2|^2$ или к

среднему значению величины $|a_1 + a_2|^2$, взятому за время наблюдения. Следовательно, в соответствии с (1.40) интенсивность в P запишется в виде

$$I = \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{+\infty} |a_1 + a_2|^2 dt = \overline{|a_1 + a_2|^2},$$

$$I = \overline{[a_1(t - \theta_1) + a_2(t - \theta_2)] [a_1^*(t - \theta_1) + a_2^*(t - \theta_2)]}. \quad (1.44)$$

Раскрывая скобки, получим

$$I = \overline{a_1(t - \theta_1) a_1^*(t - \theta_1)} + \overline{a_2(t - \theta_2) a_2^*(t - \theta_2)} + \overline{a_1(t - \theta_1) a_2^*(t - \theta_2)} + \overline{a_2(t - \theta_2) a_1^*(t - \theta_1)}.$$

Если в этих выражениях изменить начало отсчета времени **), то

$$\begin{aligned} \overline{a_1(t - \theta_1) a_1^*(t - \theta_1)} &= \overline{a_1(t) a_1^*(t)}, \\ \overline{a_2(t - \theta_2) a_2^*(t - \theta_2)} &= \overline{a_2(t) a_2^*(t)}. \end{aligned} \quad (1.45)$$

*) Мы пренебрегаем здесь дисперсией среды и различием интенсивностей в точке P , вызванным различием расстояний M_2P и M_1P .

**) Независимость среднего значения (1.45) и (1.46) от начала отсчета времени означает, что рассматриваемые здесь случайные функции $a_1(t)$ и $a_2(t)$ стационарны. Это означает просто, что излучение атомов M_1 и M_2 в среднем неизменно. (Прим. ред.)

Положим

$$\theta = \theta_2 - \theta_1.$$

Тогда имеем

$$\begin{aligned} \overline{a_1(t - \theta_1) a_2^*(t - \theta_2)} &= \overline{a_1(t + \theta) a_2^*(t)}, \\ \overline{a_1^*(t - \theta_1) a_2(t - \theta_2)} &= \overline{a_1^*(t + \theta) a_2(t)}. \end{aligned} \quad (1.46)$$

Но a_1 и a_2 суть комплексные величины вида (см. § 1.3)

$$a_1 = A_1 e^{i\Phi_1}, \quad a_2 = A_2 e^{i\Phi_2}, \quad (1.47)$$

и мы получим

$$\begin{aligned} a_1(t + \theta) a_2^*(t) + a_1^*(t + \theta) a_2(t) &= 2A_1 A_2 \cos(\Phi_1 - \Phi_2) = \\ &= 2 \operatorname{Re} [a_1(t + \theta) a_2^*(t)], \end{aligned} \quad (1.48)$$

где $\operatorname{Re} [\]$ означает, что нужно взять действительную часть выражения, заключенного в квадратные скобки.

Отсюда интенсивность равна

$$I = \overline{a_1 a_1^*} + \overline{a_2 a_2^*} + 2 \operatorname{Re} [\overline{a_1(t + \theta) a_2^*(t)}]. \quad (1.49)$$

Члены $\overline{a_1 a_1^*}$ и $\overline{a_2 a_2^*}$ характеризуют энергии, излученные атомами M_1 и M_2 . Последний член в правой части (1.49) представляет собой корреляционную функцию величин a_1 и a_2 . Этот член характеризует взаимосвязь, т. е. когерентность колебаний, создаваемых M_1 и M_2 .

Преобразуем выражение (1.49), введя в него спектры $v_1(\nu)$ и $v_2(\nu)$ колебаний $V_1(t)$ и $V_2(t)$. В момент излучения обоих атомов имеем из (1.35) и (1.34)

$$V_1(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} v_1(\nu) e^{i2\pi\nu t} d\nu, \quad V_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} v_2(\nu) e^{i2\pi\nu t} d\nu; \quad (1.50)$$

спектры в точках M_1 и M_2 запишутся в виде

$$v_1(\nu) = f_1(\nu) e^{-i2\pi\nu t_1} + f_2(\nu) e^{-i2\pi\nu t_2} + \dots, \quad (1.51)$$

$$v_2(\nu) = f'_1(\nu) e^{-i2\pi\nu t'_1} + f'_2(\nu) e^{-i2\pi\nu t'_2} + \dots \quad (1.52)$$

В этих выражениях моменты времени $t_1, t'_1, t_2, t'_2, \dots$ произвольны. Рассмотрим колебания в момент, когда они достигают точки наблюдения P .

Для одной определенной частоты ν , т. е. для монохроматической составляющей, можно сказать, что если в M_1

колебание записывают в виде $e^{i2\pi\nu t}$, то в P согласно (1.22) и (1.42) оно будет равно $e^{i2\pi\nu t} e^{-i2\pi\nu\theta}$. Каждая монохроматическая составляющая частоты ν характеризуется амплитудой $v(\nu)$, и поэтому колебания в P в момент времени t запишутся согласно (1.35) следующим образом:

$$V_1(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} v_1(\nu) e^{i2\pi\nu t} e^{-i2\pi\nu\theta_1} d\nu, \quad (1.53)$$

$$V_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} v_2(\nu) e^{i2\pi\nu t} e^{-i2\pi\nu\theta_2} d\nu. \quad (1.54)$$

Полагая, как и ранее, $\theta = \theta_2 - \theta_1$, получаем

$$V_1(t + \theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} v_1(\nu) e^{i2\pi\nu t} e^{i2\pi\nu\theta} d\nu, \quad (1.55)$$

$$V_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} v_2(\nu) e^{i2\pi\nu t} d\nu. \quad (1.56)$$

Выделяя среднюю частоту ν_0 , находим

$$V_1(t + \theta) = e^{i2\pi\nu_0 t} \int_{-\infty}^{+\infty} v_1(\nu) \exp [i2\pi [\nu(t + \theta) - \nu_0 t]] d\nu, \quad (1.57)$$

$$V_2(t) = e^{i2\pi\nu_0 t} \int_{-\infty}^{+\infty} v_2(\nu) \exp [i2\pi (\nu - \nu_0) t] d\nu. \quad (1.58)$$

Отсюда для комплексных амплитуд $a_1(t + \theta)$ и $a_2(t)$ получим

$$a_1(t + \theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} v_1(\nu) \exp \{i2\pi [\nu(t + \theta) - \nu_0 t]\} d\nu, \quad (1.59)$$

$$a_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} v_2(\nu) \exp [i2\pi (\nu - \nu_0) t] d\nu. \quad (1.60)$$

Из соотношений (1.57) — (1.60) следует, что

$$V_1(t + \theta) V_2^*(t) = a_1(t + \theta) a_2^*(t). \quad (1.61)$$

Далее, можем написать

$$\int_{-\infty}^{+\infty} a_1(t + \theta) a_2^*(t) dt = \\ = \int_{-\infty}^{+\infty} a_2^*(t) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} v_1(v) \exp \{i2\pi [v(t + \theta) - v_0 t]\} dv \right] dt$$

и, меняя порядок интегрирования, находим

$$\int_{-\infty}^{+\infty} a_1(t + \theta) a_2^*(t) dt = \\ = \int_{-\infty}^{+\infty} v_1(v) e^{i2\pi v \theta} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} a_2^*(t) \exp [i2\pi (v - v_0) t] dt \right] dv.$$

Но из (1.60)

$$v_2^*(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} a_2^*(t) \exp [i2\pi (v - v_0) t] dt;$$

следовательно,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} V_1(t + \theta) V_2^*(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} a_1(t + \theta) a_2^*(t) dt = \\ = \int_{-\infty}^{+\infty} v_1(v) v_2^*(v) e^{i2\pi v \theta} dv, \quad (1.62)$$

откуда

$$\overline{a_1(t + \theta) a_2^*(t)} = \\ = \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{+\infty} a_1(t + \theta) a_2^*(t) dt = \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{+\infty} v_1(v) v_2^*(v) e^{i2\pi v \theta} dv \quad (1.63)$$

и

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |a_1(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |v_1(v)|^2 dv. \quad *) \quad (1.64)$$

*) Формула (1.64) есть частный случай теоремы Парсеваля. Подробнее см. А. Анго, «Математика для электро- и радиоинженеров», «Наука», 1965 или Г. М. Фихтенгольц, «Курс дифференциального и интегрального исчисления», т. III, Физматгиз, 1960. (Прим. ред.)

Согласно (1.49), (1.63) и (1.64) находим, что интенсивность I в точке P равна (с точностью до константы)

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} |v_1(v)|^2 dv + \int_{-\infty}^{+\infty} |v_2(v)|^2 dv + 2 \operatorname{Re} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} v_1(v) v_2^*(v) e^{i2\pi v \theta} dv \right]. \quad (1.65)$$

Вычислим третий член в правой части (1.49) и (1.65), характеризующий корреляцию колебаний, излученных обоими атомами.

Если N — число цугов волн, то

$$v_1(v) v_2^*(v) = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N f_n(v) f_m^*(v) \exp[-i2\pi v(t_n - t'_m)]. \quad (1.66)$$

Пусть J_n и J'_m — модули $f_n(v)$ и $f_m^*(v)$, а α_{nm} — аргумент произведения $f_n(v) f_m^*(v)$; тогда

$$v_1(v) v_2^*(v) = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N J_n J'_m \{ \cos [2\pi v(t_n - t'_m) - \alpha_{nm}] - i \sin [2\pi v(t_n - t'_m) - \alpha_{nm}] \}. \quad (1.67)$$

Так как мы имеем дело с двумя разными атомами, то углы $[2\pi v(t_n - t'_m) - \alpha_{nm}]$ принимают всевозможные значения, и суммы синусов и косинусов по отдельности будут равны нулю.

Следовательно, мы можем написать

$$\overline{a_1(t + \theta) a_2^*(t)} = 0. \quad (1.68)$$

Между колебаниями, излученными двумя различными атомами, нет никакой корреляции, и выражение (1.49) сводится к

$$I = \overline{a_1 a_1^*} + \overline{a_2 a_2^*}. \quad (1.69)$$

Аналогично из (1.65) имеем

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} |v_1(v)|^2 dv + \int_{-\infty}^{+\infty} |v_2(v)|^2 dv. \quad (1.70)$$

Монохроматические составляющие, создаваемые двумя различными атомами, некогерентны и складываются по интенсивности.

Нельзя заставить интерферировать колебания, испускаемые двумя различными атомами, даже если последние излучают с одной и той же частотой. Монохроматический фильтр, пропускающий только одну частоту ν_0 , дал бы в этом случае

$$I = |\nu_1(\nu_0)|^2 + |\nu_2(\nu_0)|^2. \quad (1.71)$$

§ 1.6. Колебания с различными частотами, создаваемые одним атомом

Теперь предположим, что оба колебания, достигающие точки P , создаются одним и тем же атомом M (рис. 17). Колебание, испущенное M , записывается в виде

$$V(t) = a(t) e^{i2\pi\nu_0 t},$$

если атом излучает со средней частотой ν_0 .

Пусть некий прибор, не показанный на рис. 17, делит падающую волну на две идентичные волны, идущие по двум разным путям 1 и 2 .

Если θ_1 и θ_2 — два интервала времени, требующихся волнам для прохождения этих двух путей, то колебание в P в момент времени t можно записать в виде (1.43), т. е.

$$V(t - \theta_1) + V(t - \theta_2).$$

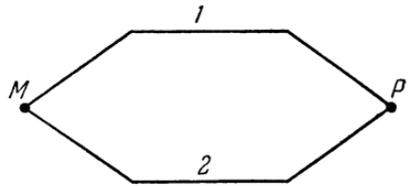


Рис. 17.

Функция V одинакова для обоих членов, так как колебания, идущие по путям 1 и 2 , создаются одним и тем же атомом. Цуги волн, идущие по пути 2 , лишь смещены по отношению к цугам, идущим по пути 1 .

Рассмотрим два монохроматических фильтра. Один из них, помещенный на пути 1 , пропускает частоту ν ; другой, помещенный на пути 2 , — частоту ν' . Имеем

$$\begin{aligned} \nu(\nu) &= f_1(\nu) e^{-i2\pi\nu t_1} + \dots, \\ \nu(\nu') &= f_1(\nu') e^{-i2\pi\nu' t_1} + \dots \end{aligned} \quad (1.72)$$

Моменты времени t_1, t_2, \dots в обоих выражениях совпадают, так как это — те моменты, в которые цуги волн были испущены атомом. Функция f_1 представляет собой компоненту спектра, соответствующую колебанию, излученному атомом в момент времени t_1 . Так как пути 1 и 2 имеют один и тот же фактор пропускания, то функция f_1 одинакова для обоих

путей. Для пути 1 она имеет значение $f_1(\nu)$, соответствующее частоте ν , а для пути 2 — значение $f_1(\nu')$, соответствующее частоте ν' .

То же справедливо и для других функций f_2, f_3, \dots , соответствующих различным цугам волн, излученных атомом.

Пользуясь предыдущими обозначениями, получаем

$$v(\nu) v^*(\nu') = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N f_n(\nu) f_m^*(\nu') \exp[-i2\pi(\nu t_n - \nu' t_m)]. \quad (1.73)$$

Углы νt_n и $\nu' t_m$, так же как и раньше, могут принимать любые значения и суммы их синусов равны нулю; следовательно,

$$v(\nu) v^*(\nu') = 0.$$

Таким образом, вместо (1.65) получим

$$I = |v(\nu)|^2 + |v(\nu')|^2. \quad (1.74)$$

Отсюда следует, что для обычных наблюдений, требующих очень больших промежутков времени по сравнению с длительностью цугов, излучения с разными частотами, приходящие от одного и того же атома, некогерентны и складываются по интенсивности. Следовательно, такие излучения с разными частотами, приходящие от одного и того же атома, не создают явления интерференции. Отметим, что если бы наблюдения могли производиться в течение очень малых промежутков времени (меньших τ), то биения между разными частотами могли бы создать флуктуации интенсивности I .

§ 1.7. Колебания с одной и той же частотой, приходящие от одного и того же атома

В этом случае оба выражения (1.72) одинаковы. Имеем

$$v(\nu) v^*(\nu) = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N f_n(\nu) f_m^*(\nu) \exp[-i2\pi\nu(t_n - t_m)]. \quad (1.75)$$

Моменты времени t_n и t_m по-прежнему могут быть любыми и суммы синусов и косинусов равны нулю, но здесь остаются члены с $m = n$; имеем

$$v(\nu) v^*(\nu) = \sum_{n=1}^N f_n(\nu) f_n^*(\nu) = \sum_{n=1}^N |f_n(\nu)|^2. \quad (1.76)$$

Поскольку $v_1 = v_2$, третий член правой части (1.65) запишется в виде

$$\begin{aligned}
 2 \operatorname{Re} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} v(v) v^*(v) e^{i2\pi v\theta} dv \right] &= \\
 &= 2 \operatorname{Re} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i2\pi v\theta} \left(\sum_{n=1}^N |f_n(v)|^2 \right) dv \right] = \\
 &= 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \cos 2\pi v\theta \left(\sum_{n=1}^N |f_n(v)|^2 \right) dv. \quad (1.77)
 \end{aligned}$$

Если δ — разность хода обоих колебаний, приходящих в P по путям 1 и 2, то

$$2\pi v\theta = \frac{2\pi v\delta}{v} = \frac{2\pi\delta}{\lambda} = \varphi, \quad (1.78)$$

где λ — длина волны в вакууме.

Правую часть (1.77) можно записать в виде

$$2 \int_{-\infty}^{+\infty} \cos \varphi \left(\sum_{n=1}^N |f_n(v)|^2 \right) dv. \quad (1.79)$$

Положим

$$|v(v)|^2 = v(v) v^*(v) = \sum_{n=1}^N |f_n(v)|^2 = I_0. \quad (1.80)$$

Тогда интенсивность I в P , полученная из (1.65), принимает вид

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} (I_0 + I_0 + 2I_0 \cos \varphi) dv. \quad (1.81)$$

Колебания с одинаковой частотой, приходящие от одного и того же атома, полностью когерентны. В монохроматическом свете получим

$$I = 4I_0 \cos^2 \frac{\varphi}{2}, \quad (1.82)$$

т. е. элементарную классическую формулу.

§ 1.8. Представление излучения некогерентного источника

Источник излучения, даже «точечный» в оптическом смысле, содержит множество атомов, излучающих цуги волн в случайно распределенные моменты времени. Волна, испущенная источником в определенный момент времени, — это сумма отдельных волн, обязанных своим происхождением разным атомам.

Колебание $V(t)$, записанное в виде (1.36), представляет собой последовательность цугов, излученных одним атомом. Так как все эти цуги некогерентны, то несущественно, испущены они одним атомом или несколькими. Достаточно заметить, что в соответствии с выражением (1.31) при большом числе излучателей их действие накладывается друг на друга в момент времени t_0 , так как различные атомы могут излучать в один и тот же момент или в мало отличающиеся друг от друга моменты. Поэтому можно считать, что выражение $V(t)$ описывает волну, излученную в данный момент протяженным источником.

Кроме того, цуги волн ограничены, и поэтому $V(t)$, определяемое выражением (1.35), представляет собой немонохроматическое колебание. Таким образом, $V(t)$ описывает колебание, излученное немонохроматическим протяженным источником. Теперь определим амплитуду и фазу излучения источника в любой момент времени t . Пользуясь комплексным представлением, можно сказать, что колебание имеет вид (1.39), т. е.

$$V(t) = a(t) e^{i2\pi\nu_0 t}. \quad (1.83)$$

Мы предполагаем, что комплексная амплитуда $a(t)$ меняется медленно по сравнению с изменением колебательного члена $e^{i2\pi\nu_0 t}$, иначе говоря, что интервал $\Delta\nu$, в котором располагаются частоты спектра, мал по сравнению со средней частотой ν_0 (квазимонохроматический свет).

В обычных наблюдениях, когда говорят об интенсивности излучения источника, не вводят величину τ , так как время наблюдения T велико по сравнению с τ . За время T амплитуда $a(t)$ изменяется в комплексной плоскости весьма сложным образом, и интенсивность источника характеризуется выражением (1.40), т. е.

$$|a(t)|^2 = \overline{a(t) a^*(t)}.$$

Иначе обстоит дело при наблюдении интерференции, когда рассматриваются цуги волн, проходящие через данную точку через очень малые промежутки времени порядка τ . Два интерферирующих пучка проходят пути, мало отличающиеся друг от друга. Это значит, что оба цуга волн, происходящие от одного и того же начального цуга, проходят через данную точку через малые промежутки времени θ . Этот интервал остается неизменным в течение наблюдения. Но, так как одному и тому же интервалу времени θ не всегда соответствует одно и то же различие в амплитудах, видимость интерференционных полос зависит от флуктуаций амплитуд за время наблюдения. Предположим, что два интерферирующих колебания прошли пути, отличающиеся друг от друга на δ . Это значит, что комплексные амплитуды этих колебаний будут выражаться двумя значениями $a(t)$, соответствующими двум моментам t и $t + \theta$, где $\theta = \delta/c$ (c — скорость света).

Если $\theta \ll \tau$, то различие между амплитудами невелико и мало изменяется во времени. При этом интерференция будет прекрасно наблюдаться. Если $\theta \gg \tau$, то различие между амплитудами в моменты времени t и $t + \theta$ значительно и оно существенно изменяется за время наблюдения. При этом интерференционные полосы становятся неразличимыми.

§ 1.9. Корреляция между колебаниями при интерференционных явлениях. Степень частичной когерентности

Рассмотрим опыт Юнга (рис. 18): протяженный источник S освещает экран E_1 с двумя очень маленькими отверстиями T_1 и T_2 . Изучается распределение света на втором экране E_2 . Световые волны, излученные протяженным источником (квазимонохроматический свет), можно представить выражением

$$V(t) = a(t) e^{i2\pi\nu_0 t} = \int_{-\infty}^{+\infty} v(\nu) e^{i2\pi\nu t} d\nu. \quad (1.84)$$

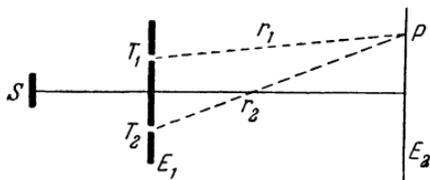


Рис. 18.

Предположим, что $V(t)$ — это волна, излученная источником в некой точке плоскости E_1 . Пусть θ_1 — время, за которое свет прошел от T_1 до точки P в плоскости наблюдения E_2 . Колебание в P в момент времени t совпадает

с колебанием в T_1 в момент времени $t - \theta_1$. Оно описывается выражением $V_1(t - \theta_1)$. То же относится и к колебанию, создаваемому T_2 в P , которому соответствует $V_2(t - \theta_2)$.

«Мгновенное» колебание в P описывается выражением

$$V(t) = V_1(t - \theta_1) + V_2(t - \theta_2). \quad (1.85)$$

Это совпадает с выражением (1.43), если T_1 и T_2 играют роль M_1 и M_2 на рис. 16*).

Интенсивность I в точке P дается выражением (1.49), т. е. **)

$$I = \overline{a_1 a_1^*} + \overline{a_2 a_2^*} + 2 \operatorname{Re} [\overline{a_1(t + \theta) a_2^*(t)}], \quad (1.86)$$

где a_1 и a_2 — комплексные амплитуды колебаний V_1 и V_2 .

Положим

$$I_1 = \overline{a_1 a_1^*}, \quad I_2 = \overline{a_2 a_2^*}. \quad (1.87)$$

Это — интенсивности, создаваемые в P освещенными отверстиями T_1 и T_2 , действующими по отдельности. Корреляционная функция $\overline{a_1(t + \theta) a_2^*(t)}$ характеризует когерентность колебаний, пришедших от T_1 и T_2 в точку наблюдения P .

Функцию $\Gamma_{12}(\theta) = \overline{a_1(t + \theta) a_2^*(t)}$ называют взаимной когерентностью колебаний, излученных T_1 и T_2 и пришедших в точку P . Нормируя $\Gamma_{12}(\theta)$, получаем

$$\gamma_{12}(\theta) = \frac{\overline{a_1(t + \theta) a_2^*(t)}}{\sqrt{\overline{a_1 a_1^*}} \sqrt{\overline{a_2 a_2^*}}} = \frac{\overline{a_1(t + \theta) a_2^*(t)}}{\sqrt{I_1} \sqrt{I_2}}. \quad (1.88)$$

Величину $\gamma_{12}(\theta)$ называют степенью комплексной когерентности колебаний, излученных T_1 и T_2 и пришедших в P .

Соотношение (1.86) можно теперь записать в виде

$$I = I_1 + I_2 + 2 \sqrt{I_1} \sqrt{I_2} \operatorname{Re} [\gamma_{12}(\theta)]. \quad (1.89)$$

Запишем его также в другом виде.

Для каждой частоты ν комплексные амплитуды имеют в P определенную разность фаз $2\pi\nu\theta$. Ее можно ввести для средней частоты ν_0 ; в самом деле,

$$\begin{aligned} a_1(t + \theta) &= \\ &= A_1(t + \theta) \exp \{i [\Phi_1(t + \theta) - 2\pi\nu_0\theta]\} \exp [i2\pi\nu_0\theta]. \end{aligned} \quad (1.90)$$

*) Мы пренебрегаем рассеянием в среде и различием между интенсивностями в P , происходящим из-за различия в расстояниях M_2P и M_1P .

**) Здесь, как и ранее, $\theta = \theta_2 - \theta_1$. (Прим. ред.)

Введя обозначение

$$\Phi_1'(t + \theta) = \Phi_1(t + \theta) - 2\pi\nu_0\theta,$$

получим

$$a_1(t + \theta) = A_1(t + \theta) \exp \{i [\Phi_1'(t + \theta) + 2\pi\nu_0\theta]\}$$

и

$$a_2(t) = A_2(t) e^{i\Phi_2(t)}.$$

Для средней величины $\overline{a_1(t + \theta) a_2^*(t)}$ чисто формально получим комплексное число, модуль и фаза которого зависят только от θ . В самом деле,

$$\overline{a_1(t + \theta) a_2^*(t)} = \overline{a_1(t + \theta) a_2^*(t)} \exp \{i [\varphi(\theta) + 2\pi\nu_0\theta]\} \quad (1.91)$$

или

$$\Gamma_{12}(\theta) = |\Gamma_{12}(\theta)| \exp \{i [\varphi(\theta) + 2\pi\nu_0\theta]\} \quad (1.92)$$

и

$$\gamma_{12}(\theta) = |\gamma_{12}(\theta)| \exp \{i [\varphi(\theta) + 2\pi\nu_0\theta]\}.$$

Отсюда находим для интенсивности

$$I = I_1 + I_2 + 2 \sqrt{I_1} \sqrt{I_2} |\gamma_{12}(\theta)| \cos [\varphi(\theta) + 2\pi\nu_0\theta]. \quad (1.93)$$

Пусть

$$2\pi\nu_0\theta = \frac{2\pi(r_2 - r_1)}{\lambda_0} = \psi, \quad (1.94)$$

где λ_0 — средняя длина волны, а ψ — разность фаз в P для этой средней длины волны. Тогда

$$I = I_1 + I_2 + 2 \sqrt{I_1} \sqrt{I_2} |\gamma_{12}(\theta)| \cos [\varphi(\theta) + \psi]. \quad (1.95)$$

Здесь $|\gamma_{12}(\theta)|$ — степень частичной когерентности колебаний, пришедших в точку P от освещенных отверстий T_1 и T_2 . Согласно неравенству Буняковского — Шварца

$$|\gamma_{12}(\theta)| \leq 1^* \quad (1.96)$$

*) Неравенство Буняковского — Шварца имеет вид

$$\left[\int_a^b f(x) g(x) dx \right]^2 \leq \int_a^b f^2(x) dx \int_a^b g^2(x) dx.$$

О его связи с теорией корреляционных функций см. А. Анго, «Математика для электро- и радионженеров», «Наука», 1965, стр. 641. (Прим. ред.)

Если $|\gamma_{12}(\theta)| = 1$, то картина интерференции в P будет такой же, как и в случае полностью монохроматического света с длиной волны λ_0 (соответствующей ν_0) и разностью фаз между колебаниями, выходящими из T_1 и T_2 , равной $\varphi(\theta)$. В этом случае говорят, что волны, излученные T_1 и T_2 , когерентны. Если $|\gamma_{12}(\theta)| = 0$, то интерференция не имеет места ($I = I_1 + I_2$ в точке P) и волны, излученные освещенными отверстиями T_1 и T_2 , некогерентны.

Наконец, когда

$$0 < |\gamma_{12}(\theta)| < 1,$$

колебания частично когерентны.

ГЛАВА II

КОГЕРЕНТНОСТЬ КВАЗИМОНОХРОМАТИЧЕСКОГО СВЕТА

§ 2.1. Контрастность интерференционных полос в квазимонохроматическом свете

Вернемся к опыту, описанному в § 1.9.

Согласно (1.63) степень взаимной когерентности колебаний в P равна

$$\overline{a_1(t+\theta) a_2^*(\theta)} = \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{+\infty} v_1(v) v_2^*(v) e^{i2\pi v\theta} dv; \quad (2.1)$$

сравнивая это соотношение с (1.92), найдем

$$\begin{aligned} |\Gamma_{12}(\theta)| \exp[i\varphi(\theta)] &= \\ &= \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{+\infty} v_1(v) v_2^*(v) \exp[i2\pi(v - v_0)\theta] dv. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Следовательно, если $v \approx v_0$ (квазимонохроматический свет), то интеграл содержит лишь члены с низкими частотами. Величины $|\Gamma_{12}(\theta)|$ или $|\gamma_{12}(\theta)|$ и $\varphi(\theta)$ как функции θ меняются медленно по сравнению с изменением $e^{i2\pi v_0\theta}$, иначе говоря, по сравнению с $\cos 2\pi v_0\theta$ и $\sin 2\pi v_0\theta$. Следовательно, когда точка P перемещается в плоскости E_2 , можно считать, что $|\gamma_{12}(\theta)|$ остается практически постоянным. Кроме того, если отверстия T_1 и T_2 достаточно малы, то I_1 и I_2 остаются постоянными в плоскости E_2 , где наблюдается интерференция. В формуле (1.95) для интенсивности все члены постоянны,

кроме ψ . Светлые полосы с интенсивностью $I_{\text{макс}}$ будут наблюдаться там, где

$$\varphi(\theta) + \psi = \varphi(\theta) + \frac{2\pi(r_2 - r_1)}{\lambda_0} = 2m\pi, \quad (2.3)$$

где $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, а темные полосы с интенсивностью $I_{\text{мин}}$ — там, где

$$\varphi(\theta) + \psi = \varphi(\theta) + \frac{2\pi(r_2 - r_1)}{\lambda_0} = (2m + 1)\pi. \quad (2.4)$$

Имеем

$$\begin{aligned} I_{\text{макс}} &= I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} |\gamma_{12}(\theta)|, \\ I_{\text{мин}} &= I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2} |\gamma_{12}(\theta)|. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Отсюда контраст между полосами запишется в виде

$$\gamma = \frac{I_{\text{макс}} - I_{\text{мин}}}{I_{\text{макс}}} = \frac{4\sqrt{I_1 I_2} |\gamma_{12}(\theta)|}{I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} |\gamma_{12}(\theta)|}, \quad (2.6)$$

и если $I_1 = I_2$, то

$$\gamma = \frac{2|\gamma_{12}(\theta)|}{1 + |\gamma_{12}(\theta)|}. \quad (2.7)$$

Случай, когда θ очень мало. Часто время θ настолько мало, что

$$(v - v_0)\theta \ll 1. \quad (2.8)$$

Так как $v = c/\lambda_0$, а $\Delta v = c \Delta\lambda/\lambda_0^2$, то неравенство (2.8) можно записать также в виде

$$c\theta \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0^2} \ll 1. \quad (2.9)$$

Если $\delta = c\theta$ — разность хода, то

$$\delta \ll \frac{\lambda_0^2}{\Delta\lambda}. \quad (2.10)$$

Величина $\lambda_0^2/\Delta\lambda$ есть длина когерентности (см. § 1.2). Нужно, следовательно, чтобы разность хода была мала по сравнению с длиной когерентности. Так как $p = \delta/\lambda_0$ — порядок интерференции, то

$$\Delta p = \delta \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0^2} \quad (2.11)$$

и неравенство (2.10) можно записать также в виде

$$\Delta p \ll 1. \quad (2.12)$$

Иными словами, изменение порядка интерференции Δp , вызванное изменениями длины волны $\Delta \lambda$, должно быть значительно меньше единицы.

Если справедливо неравенство (2.8), то интеграл в правой части уравнения (2.1) имеет практически ту же величину, что и при $\theta = 0$.

Находим, следовательно,

$$|\Gamma_{12}(\theta)| \approx |\Gamma_{12}(0)|, \quad |\gamma_{12}(\theta)| \approx |\gamma_{12}(0)|, \quad \varphi(\theta) \approx \varphi(0), \quad (2.13)$$

и интенсивность I в точке P оказывается равной

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} |\gamma_{12}(0)| \cos[\varphi(0) + \psi]. \quad (2.14)$$

Этим выражением мы будем пользоваться далее. При этом

$$\Gamma_{12}(0) = \overline{a_1(t) a_2^*(t)}, \quad (2.15)$$

$$|\gamma_{12}(0)| = \frac{|\overline{a_1(t) a_2^*(t)}|}{\sqrt{I_1 I_2}} \quad (2.16)$$

и в соответствии с (1.92)

$$\gamma_{12}(0) = |\gamma_{12}(0)| e^{i\varphi(0)}. \quad (2.17)$$

Контраст полос будет равен теперь (при $I_1 = I_2$)

$$\gamma = \frac{2|\gamma_{12}(0)|}{1 + |\gamma_{12}(0)|} \quad (2.18)$$

или

$$\gamma = \frac{2|\overline{a_1(t) a_2^*(t)}|}{a_1 a_1^* + |\overline{a_1(t) a_2^*(t)}|}. \quad (2.19)$$

Замечание о смысле величины $\varphi(\theta)$. Из формул (2.3) и (2.4) видно, что полосы находятся в том же положении, что и в полностью монохроматическом свете, но фаза колебания, пришедшего из T_2 , запаздывает на $\varphi(\theta)$ по сравнению с фазой колебания, пришедшего из T_1 . Фаза $\varphi(\theta)$ зависит от θ , но если θ очень мало, то $\varphi(\theta) \approx \varphi(0)$.

$\varphi(0)$ представляет собой как бы эффективную разность фаз между колебаниями, излученными T_1 и T_2 .

§ 2.2. Степень когерентности колебаний в двух точках, освещенных протяженным источником квазимонохроматического света

Две точки P_1 и P_2 (рис. 19), находящиеся в одной плоскости yOz , освещены источником S . Мы хотим вычислить степень когерентности колебаний, приходящих в эти точки.

Предполагается, что источник S является элементом плоскости, параллельной плоскости yOz , и что его размеры малы по сравнению с расстоянием CO . Пусть M — некоторая точка источника S . Мы предполагаем, что углы, образованные направлением CO с MP_2 и MP_1 , малы.

Для простоты расчетов мы поместили точку P_2 в начало координат O ; положение точки P_1 будем считать переменным.

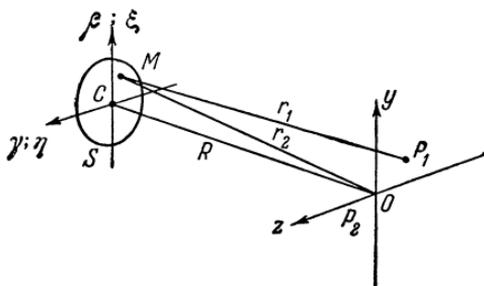


Рис. 19.

В момент испускания волну, излученную атомом, находящимся в точке M , можно описать (1.41), отметив данный атом индексом i :

$$a_i(t) e^{i2\pi\nu_0 t}. \quad (2.20)$$

Эта же волна в момент, когда она приходит в точки P_1 и P_2 , запишется в виде

$$a_{i_1}(t) = a_i\left(t - \frac{r_1}{c}\right) \frac{\exp [i2\pi\nu_0 (t - r_1/c)]}{r_1}, \quad (2.21)$$

$$a_{i_2}(t) = a_i\left(t - \frac{r_2}{c}\right) \frac{\exp [i2\pi\nu_0 (t - r_2/c)]}{r_2}. \quad (2.22)$$

Колебания в P_1 и P_2 , создаваемые всеми атомами источника, описываются соотношениями

$$a_1(t) = \sum a_i(t - r_1/c) \frac{\exp [i2\pi\nu_0 (t - r_1/c)]}{r_1} = \sum a_{i_1}(t), \quad (2.23)$$

$$a_2(t) = \sum a_i(t - r_2/c) \frac{\exp [i2\pi\nu_0 (t - r_2/c)]}{r_2} = \sum a_{i_2}(t).$$

Отсюда для взаимной когерентности колебаний в P_1 и P_2 найдем

$$\Gamma_{12}(0) = \overline{a_1(t) a_2^*(t)} = \overline{\sum a_{i_1}(t) \sum a_{j_2}^*(t)}. \quad (2.24)$$

Но произведения, в которых $i \neq j$, соответствуют различным атомам и, следовательно, создаваемые ими колебания будут

некогерентны (см. § 1.5), и тогда у нас останутся только члены вида

$$\Gamma_{12}(0) = \overline{\sum a_{i_1}(t) a_{i_2}^*(t)}. \quad (2.25)$$

Имеем

$$\Gamma_{12}(0) = \overline{\sum a_i\left(t - \frac{r_1}{c}\right) a_i^*\left(t - \frac{r_2}{c}\right) \frac{\exp\left[i2\pi\nu_0\left(\frac{r_2 - r_1}{c}\right)\right]}{r_1 r_2}}; \quad (2.26)$$

так как $\theta = \frac{r_2 - r_1}{c}$ мало, то при усреднении оно исчезает *) и мы получим

$$\Gamma_{12}(0) = \overline{\sum a_i(t) a_i^*(t) \frac{\exp\left[i2\pi\nu_0\left(\frac{r_2 - r_1}{c}\right)\right]}{r_1 r_2}}. \quad (2.27)$$

Из (2.20) видно, что $\overline{a_i(t) a_i^*(t)}$ представляет энергию, излученную атомом M . Так как атомов в источнике очень много, то мы можем заменить сумму интегралом. Если $I(S) dS$ — энергия, излученная элементом dS источника, то

$$I(S) dS = \overline{a_i(t) a_i^*(t)} \quad (2.28)$$

и

$$\Gamma_{12}(0) = \int_S I(S) \frac{\exp[ik_0(r_2 - r_1)]}{r_1 r_2} dS, \quad (2.29)$$

где $k_0 = \frac{2\pi\nu_0}{c} = \frac{2\pi}{\lambda_0}$.

Отсюда получаем для степени комплексной когерентности

$$\gamma_{12}(0) = \frac{1}{\sqrt{I_1 I_2}} \int_S I(S) \frac{\exp[ik_0(r_2 - r_1)]}{r_1 r_2} dS, \quad (2.30)$$

где

$$I_1 = \int_S \frac{I(S)}{r_1^2} dS, \quad I_2 = \int_S \frac{I(S)}{r_2^2} dS. \quad (2.31)$$

Величины I_1 и I_2 представляют собой интенсивности в точках P_1 и P_2 . Поместим теперь в плоскости источника экран с отверстием той же формы и величины, что и источник. Если это отверстие вырезает участок поверхности

*) Пренебрежение запаздыванием θ в аргументе a_i совпадает с требованием $(r_2 - r_1) \ll l$ — длины когерентности. (Прим. ред.)

сферической волны с центром в P_2 , то в плоскости yOz появится некое распределение амплитуды, обусловленное дифракцией, причем P_2 — центр дифракционной картины. Тогда формула (2.30) показывает, что степень комплексной когерентности в обеих точках P_1 и P_2 выражается подобно амплитуде в точке P_1 в указанной дифракционной картине. Это и есть теорема Ван Циттерта — Цернике.

Вычислим $r_2 - r_1 = MP_2 - MP_1$. Точка M имеет координаты ξ и η , точка P_1 — координаты y и z . Полагая $CO = R$, имеем

$$r_1^2 = (y - \xi)^2 + (z - \eta)^2 + R^2, \quad (2.32)$$

$$r_1 \approx R + \frac{(y - \xi)^2 + (z - \eta)^2}{2R} \quad (2.33)$$

и

$$r_2 \approx R + \frac{\xi^2 + \eta^2}{2R}; \quad (2.34)$$

отсюда

$$r_2 - r_1 \approx -\frac{y^2 + z^2}{2R} + \frac{y\xi + z\eta}{R}. \quad (2.35)$$

Положив

$$\frac{\xi}{R} = \beta, \quad \frac{\eta}{R} = \gamma, \quad (2.36)$$

получим

$$r_2 - r_1 = -\frac{y^2 + z^2}{2R} + \beta y + \gamma z. \quad (2.37)$$

Обозначая

$$\psi_{12} = -k_0 \left(\frac{y^2 + z^2}{2R} \right), \quad (2.38)$$

можем записать степень комплексной когерентности (2.30) в виде

$$\gamma_{12}(0) = \frac{e^{i\psi_{12}}}{\sqrt{I_1 I_2}} \int_S \int I(\beta, \gamma) \exp[ik_0(\beta y + \gamma z)] d\beta d\gamma. \quad (2.39)$$

Так как

$$I_1 \approx I_2 = \int_S \int I(\beta, \gamma) d\beta d\gamma, \quad (2.40)$$

то окончательно получим

$$\gamma_{12}(0) = \frac{e^{i\psi_{12}} \int_S \int I(\beta, \gamma) \exp[ik_0(\beta y + \gamma z)] d\beta d\gamma}{\int_S \int I(\beta, \gamma) d\beta d\gamma}. \quad (2.41)$$

Степень комплексной когерентности выражается через преобразование Фурье от распределения энергии $I(\beta, \gamma)$, излученной источником. Это преобразование Фурье нормировано.

Замечание. Если точка M совпадает с C , то $\beta = \gamma = 0$, и из (2.37) получим

$$r_2 - r_1 = -\frac{y^2 + z^2}{2R}. \quad (2.42)$$

Следовательно, ψ_{12} представляет собой разность фазы,

$$\psi_{12} = \frac{2\pi}{\lambda_0} (CP_2 - CP_1). \quad (2.43)$$

Величина ψ_{12} пренебрежимо мала, если $CP_2 - CP_1 \ll \lambda_0$.

§ 2.3. Степень когерентности в двух точках, освещенных круговым некогерентным однородным источником

Пусть источник S представляет собой круг с центром в C и радиусом ρ . Нормаль CO к плоскости источника проходит через P_2 . Имеем

$$\gamma_{12}(0) = \left[\frac{2J_1(Z)}{Z} \right] e^{i\psi_{12}}, \quad (2.44)$$

где

$$Z = \frac{2\pi}{\lambda_0} \frac{\rho}{R} \sqrt{y^2 + z^2} \quad (2.45)$$

и

$$\psi_{12} = -\frac{2\pi}{\lambda_0} \left(\frac{y^2 + z^2}{2R} \right), \quad (2.46)$$

так как преобразование Фурье для круга дается классическим выражением $2J_1(Z)/Z$ *).

(Если считать, что точка P_2 не находится в O , и предположить, что точки P_1 и P_2 симметричны относительно O , то $\psi_{12} = 0$.)

На рис. 20 изображены изменения степени частичной когерентности в зависимости от Z , т. е. график функции

$$|\gamma_{12}(0)| = \left| \frac{2J_1(Z)}{Z} \right|. \quad (2.47)$$

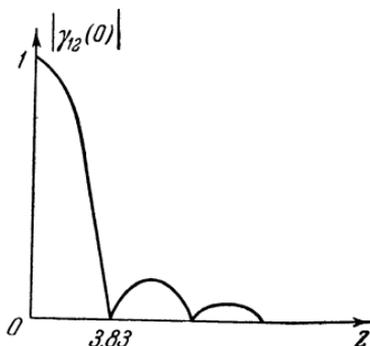


Рис. 20.

*) Источник предполагается однородным, т. е. $J(\beta, \gamma) = \text{const}$. Распределение амплитуды при дифракции от однородного диска описывается выражением $2J_1(Z)/Z$. См., например, Р. Дитчберн, «Физическая оптика», «Наука», 1965. (Прим. ред.)

Для $Z=0$ степень частичной когерентности максимальна и равна 1. Если Z возрастает, то $|\gamma_{12}(0)|$ уменьшается и при $Z=3,83$ становится равной нулю. Следовательно, колебания в точках P_1 и P_2 полностью некогерентны, если

$$Z = \frac{2\pi}{\lambda_0} \frac{\rho}{R} D = 3,83$$

и

$$D = \frac{1,22\lambda_0}{2\alpha}, \quad (2.48)$$

где $\alpha = \rho/R$ — угол, под которым из точки P_2 виден радиус источника, D — расстояние между точками P_1 и P_2 . Если считать допустимой степень частичной когерентности, равную 0,88, то необходимо, чтобы D удовлетворяло неравенству

$$D \leq \frac{0,32\lambda_0}{2\alpha}. \quad (2.49)$$

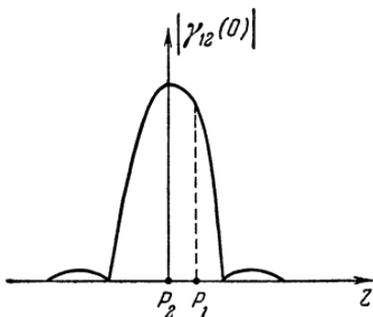


Рис. 21.

Можно понять этот результат, если начертить график зависимости функции $|\gamma_{12}(0)|$ от Z с началом координат в P_2 (рис. 21). Эта кривая изображает распределение амплитуд

при дифракции от малого кругового источника. Действительно, степень частичной когерентности $|\gamma_{12}(0)|$ определяется преобразованием Фурье от распределения энергии источника. Но, так как это распределение постоянно, то функция $|\gamma_{12}(0)|$ дает распределение амплитуд при дифракции на однородно освещенном отверстии, имеющем форму источника. В обеих точках P_1 и P_2 колебания будут когерентны, если расстояние от P_1 до P_2 (P_2 берется за начало координат) достаточно мало, чтобы ордината, относящаяся к P_1 , возможно меньше отличалась от ординаты, соответствующей P_2 .

§ 2.4. Контраст полос в опыте Юнга

Оба отверстия T_1 и T_2 освещаются щелью S , излучающей некогерентно (рис. 22). Нормаль к середине источника S проходит через середину прямой, соединяющей T_1 и T_2 . Эти отверстия играют здесь роль точек P_1 и P_2 , описанных в § 2.3. Как показано в § 2.1, контраст полос (расположенных, на-

пример, в плоскости $y'z'$ дается выражением (2.18), т. е.

$$\gamma = \frac{2|\gamma_{12}(0)|}{1 + |\gamma_{12}(0)|}. \quad (2.50)$$

Если из точек T_1 и T_2 щель видна под углом 2α , то в соответствии с (2.41) имеем

$$\gamma_{12}(0) = \frac{\sin(2\pi\alpha z/\lambda_0)}{2\pi\alpha z/\lambda_0}, \quad (2.51)$$

где $z = T_1 T_2$. На рис. 23 изображено изменение $|\gamma_{12}(0)|$

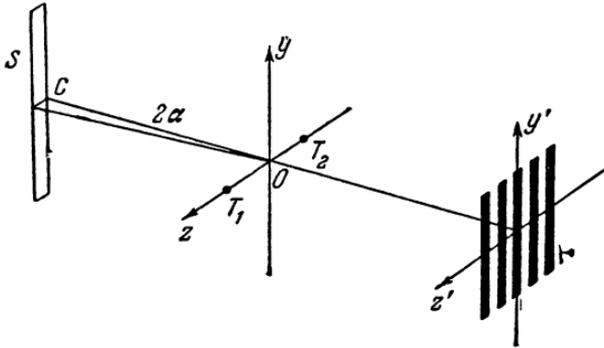


Рис. 22.

в зависимости от α . Если $\alpha = \lambda_0/2z$, то полосы пропадают. Они появляются снова при $\alpha > \lambda_0/2z$, опять пропадают при $\alpha = \lambda_0/z$ и т. д.

Так как точки T_1 и T_2 симметричны по отношению к O , то $\psi_{12} = \frac{2\pi}{\lambda_0}(CT_2 - CT_1) = 0$ и $\gamma_{12}(0)$ — действительная величина. Из (2.17) и (2.51) получим

$$\begin{aligned} \gamma_{12}(0) &= \frac{\sin(2\pi\alpha z/\lambda_0)}{2\pi\alpha z/\lambda_0} = \\ &= |\gamma_{12}(0)| e^{i\varphi(0)}. \end{aligned} \quad (2.52)$$

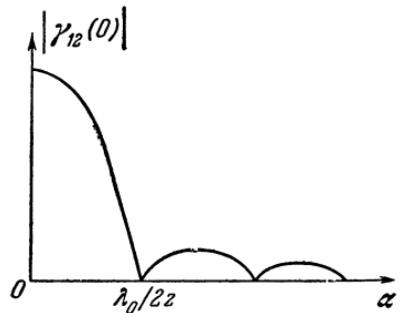


Рис. 23.

Следовательно, $\varphi(0) = 0$, если $\frac{\sin(2\pi\alpha z/\lambda_0)}{2\pi\alpha z/\lambda_0} > 0$, и $\varphi(0) = \pi$, если $\frac{\sin(2\pi\alpha z/\lambda_0)}{2\pi\alpha z/\lambda_0} < 0$. Совместив точку T_2 с точкой O , найдем

$$\psi_{12} = \frac{2\pi}{\lambda_0}(CO - CT_1) \quad (2.53)$$

и

$$\gamma_{12}(0) = \frac{\sin(2\pi a z / \lambda_0)}{2\pi a z / \lambda_0} e^{i\psi_{12}} = |\gamma_{12}(0)| e^{i\varphi(0)}. \quad (2.54)$$

Следовательно, $\varphi(0) = \psi_{12}$, если $\frac{\sin(2\pi a z / \lambda_0)}{2\pi a z / \lambda_0} > 0$, и $\varphi(0) = \pi + \psi_{12}$, если $\frac{\sin(2\pi a z / \lambda_0)}{2\pi a z / \lambda_0} < 0$.

Сдвиг по фазе ψ_{12} приводит к боковому смещению полос. Если центральная полоса проходит через точку O' , когда T_1 и T_2 симметричны (рис. 24), то она перемещается в сторону положительных z' при смещении T_2 в точку O (расстояние $T_1 T_2$ остается равным z). Степень когерентности равна модулю выражения (2.54), и контраст полос не изменяется. Вычислим распределение интенсивностей вдоль $O'z'$.

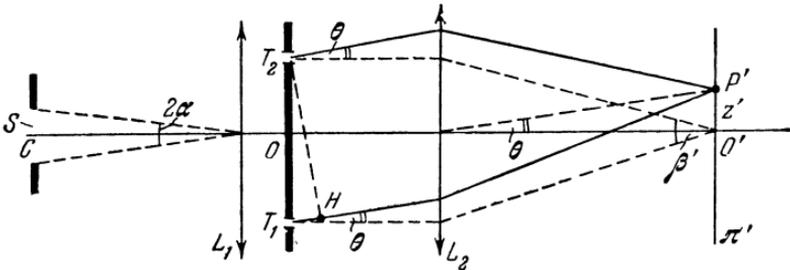


Рис. 24.

Предположим, что T_1 и T_2 — две щели, параллельные щелевому источнику. На рис. 24 щели перпендикулярны плоскости рисунка. Щелевой источник S находится в фокусе линзы L_1 . Обе щели T_1 и T_2 расположены за L_1 и интерференционные картины наблюдаются в фокальной плоскости π' второй линзы L_2 . Лучи, дифрагировавшие в некотором направлении θ на щелях T_1 и T_2 , собираются в точке P' . Вычислим интенсивность в точке P' , расположенной на расстоянии z' от центральной точки O' . При наличии одной щели T_1 она создавала бы в плоскости π' распределение интенсивности

$$I_1 = \left[\frac{\sin(2\pi \alpha' z' / \lambda_0)}{2\pi \alpha' z' / \lambda_0} \right]^2; \quad (2.55)$$

здесь $\alpha' = a/f$, где $2a$ — ширина щели T_1 , а f — фокусное расстояние линзы L_2 . Это распределение интенсивности в дифракционной картине с центром в точке O' . То же получим для щели T_2 , и если T_2 идентична T_1 , то $I_1 = I_2$.

Вычислим разность фаз ψ (см. формулу (2.14)) между колебаниями в точке P' после дифракции на щелях T_1 и T_2 . Она равна $k_0 \cdot T_1 H$. Таким образом,

$$\psi = k_0 \cdot T_1 H = k_0 z \theta; \quad (2.56)$$

но

$$\theta = \frac{z'}{f}$$

и, обозначая $z/f = \beta'$ ($z = T_1 T_2$), находим

$$\psi = \frac{2\pi\beta'z'}{\lambda_0}. \quad (2.57)$$

Согласно (2.14) интенсивность I в произвольной точке P' ($O'P' = z'$) дается выражением

$$I = 2 \left[\frac{\sin(2\pi\alpha'z'/\lambda_0)}{2\pi\alpha'z'/\lambda_0} \right]^2 \left\{ 1 + \left| \frac{\sin(2\pi\alpha z/\lambda_0)}{2\pi\alpha z/\lambda_0} \right| \cos \left[\varphi(0) - \frac{2\pi\beta'z'}{\lambda_0} \right] \right\}. \quad (2.58)$$

Если щели T_1 и T_2 достаточно узки, то дифрагированный на них свет распределяется практически равномерно в плоскости π' , где наблюдают колебания интенсивности I . Мы получим (с точностью до множителя 2) выражение

$$I = 1 + \left| \frac{\sin(2\pi\alpha z/\lambda_0)}{2\pi\alpha z/\lambda_0} \right| \cos \left[\varphi(0) - \frac{2\pi\beta'z'}{\lambda_0} \right]; \quad (2.59)$$

если щели T_1 и T_2 симметричны относительно оси CO' , то

$$\left. \begin{aligned} \varphi(0) = 0, & \quad \text{когда} \quad \frac{\sin(2\pi\alpha z/\lambda_0)}{2\pi\alpha z/\lambda_0} > 0, \\ \varphi(0) = \pi, & \quad \text{когда} \quad \frac{\sin(2\pi\alpha z/\lambda_0)}{2\pi\alpha z/\lambda_0} < 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.60)$$

Если щели не симметричны относительно оси CO' , то

$$\psi_{12} = \frac{2\pi}{\lambda_0} (CT_2 - CT_1) \quad (2.61)$$

и

$$\left. \begin{aligned} \varphi(0) = \psi_{12}, & \quad \text{когда} \quad \frac{\sin(2\pi\alpha z/\lambda_0)}{2\pi\alpha z/\lambda_0} > 0, \\ \varphi(0) = \pi + \psi_{12}, & \quad \text{когда} \quad \frac{\sin(2\pi\alpha z/\lambda_0)}{2\pi\alpha z/\lambda_0} < 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.62)$$

Во всех случаях светлые полосы будут наблюдаться там, где

$$\varphi(0) - \frac{2\pi\beta'z'}{\lambda_0} = 2m\pi \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

а темные полосы — там, где

$$\varphi(0) - \frac{2\pi\beta'z'}{\lambda_0} = (2m + 1)\pi.$$

Интенсивности $I_{\text{макс}}$ и $I_{\text{мин}}$ светлых и темных полос записываются в виде

$$I_{\text{макс}} = 1 + \left| \frac{\sin(2\pi az/\lambda_0)}{2\pi az/\lambda_0} \right|, \quad (2.63)$$

$$I_{\text{мин}} = 1 - \left| \frac{\sin(2\pi az/\lambda_0)}{2\pi az/\lambda_0} \right|. \quad (2.64)$$

Отсюда для контраста между полосами получим

$$\gamma = \frac{2 \left| \frac{\sin(2\pi az/\lambda_0)}{2\pi az/\lambda_0} \right|}{1 + \left| \frac{\sin(2\pi az/\lambda_0)}{2\pi az/\lambda_0} \right|}. \quad (2.65)$$

Это выражение совпадает с тем, которое следует из формул (2.50) и (2.51), полученных ранее.

§ 2.5. Когерентность в плоскости изображения протяженного источника

Рассмотрим случай, когда объектив O_1 создает изображение источника S в плоскости S' (рис. 25). Предполагается, что источник однороден и имеет большой размер. Согласно

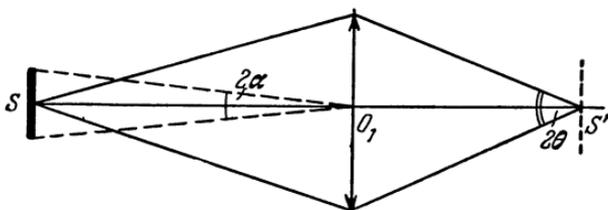


Рис. 25.

§ 2.3 (см. формулу (2.49)) в двух точках, находящихся в зрачке объектива, колебания когерентны, если расстояние между точками примерно равно $0,32\lambda_0/2\alpha$. Но если источник протяжен, то эту величину можно сделать очень малой, и тогда во всех точках, находящихся в зрачке объектива, колебания происходят практически некогерентно. Все идет так, как если бы в точке O_1 находился некогерентный источ-

ник. Когерентность в двух точках, расположенных в плоскости изображения S' , определяется преобразованием Фурье

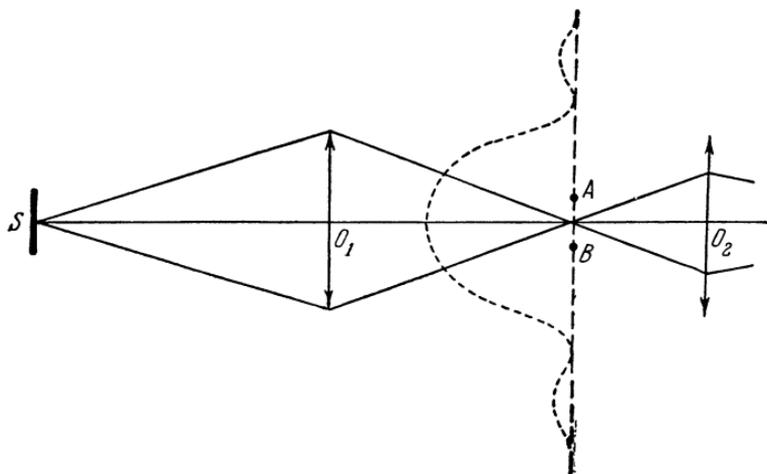


Рис. 26.

от распределения энергии по объективу. При этом когерентность колебаний в S' зависит только от угла раскрытия 2θ объектива O_1 . В большинстве случаев изображение S'

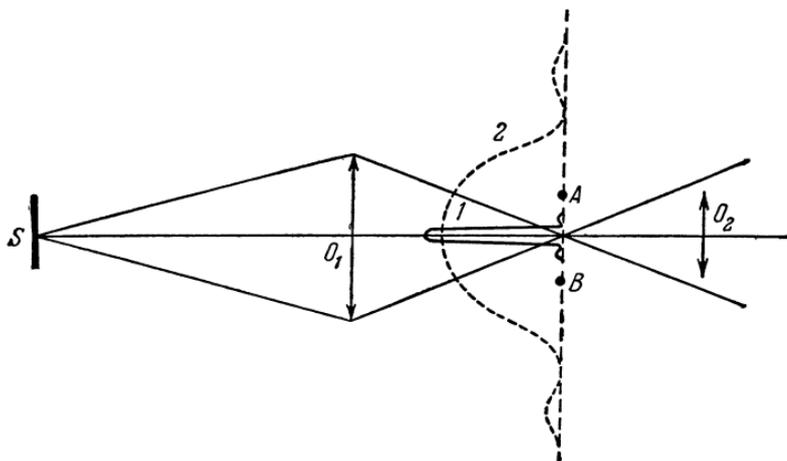


Рис. 27.

наблюдается с помощью другого объектива O_2 (рис. 26). Предположим, что угол раскрытия объектива O_2 больше, чем у объектива O_1 . Если точки A и B находятся

в центральном дифракционном пятне, создаваемом объективом O_1 , то возникающие в них колебания когерентны. Так как угол раскрытия объектива O_2 больше, чем у O_1 , то можно рассматривать точки A и B по отдельности. Если слишком сильно сблизить точки A и B , то объектив O_2 уже не сможет их разделить, но колебания в них все же останутся когерентными. Рассмотрим случай, когда угол раскрытия объектива O_2 гораздо меньше, чем у объектива O_1 (рис. 27). Кривая 1 описывает дифракцию на объективе O_1 , а кривая 2 — дифракцию на объективе O_2 . Точки A и B находятся вне дифракционного пятна, создаваемого O_1 , иными словами, колебания в них некогерентны. Так как они лежат внутри дифракционного пятна, создаваемого O_2 , увидеть их по отдельности невозможно. Если раздвигать эти точки, они становятся видны по отдельности, но колебания в них продолжают оставаться некогерентными. Когда мы рассматриваем через объектив изображение, полученное с помощью другого объектива, то когерентность в точках изображения зависит только от отношения углов раскрытия обоих объективов.

§ 2.6. Частичная когерентность в поляризационных интерферометрах

Поляризационные интерферометры можно использовать для наблюдения прозрачных изотропных объектов.

Волна, деформированная вследствие неоднородности прозрачного объекта, проходит через двоякопреломляющую

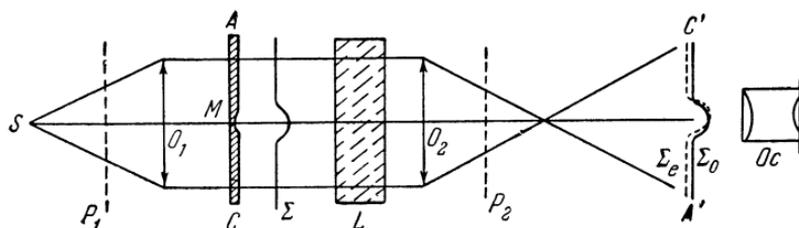


Рис. 28.

систему и разделяется на две. Пользуясь установкой с поляризатором и анализатором, можно получить две волны, способные интерферировать; таким методом можно исследовать детали прозрачного объекта AC (рис. 28), например стеклянную пластину, имеющую вблизи M небольшую область, опти-

ческая толщина которой отличается от оптической толщины всей остальной пластинки. Объект AC освещен параллельным пучком от источника S , помещенного в фокусе объектива O_1 . Второй объектив O_2 , помещенный за AC , дает в $A'C'$ изображение объекта, которое наблюдается с помощью окуляра Oc . Между объектом AC и объективом O_2 помещают двоякопреломляющую систему L с параллельными гранями. P_1 и P_2 — два поляризатора. До попадания на L падающая волна Σ представляет собой плоскую волну, центральная часть которой слегка деформирована из-за изменения оптической толщины объекта вблизи области M . После прохождения через L волна Σ разделяется на две волны Σ_o и Σ_e . Интерференция этих двух волн в плоскости изображения $A'C'$ и позволяет различить неравномерность толщины в M .

На практике источник S всегда имеет какую-то протяженность, и наша цель состоит в том, чтобы рассмотреть, каким образом изменяется контрастность изображения как функция размеров источника, излучающего квазимонохроматический свет.

Мы рассматриваем в качестве двоякопреломляющей системы L полярископ (рис. 29). Он состоит из двух плоскопараллельных пластин одноосного кристалла (например, кварца), вырезанных под углом 45° к оптической оси, причем оси пластин перпендикулярны друг другу и находятся в одной плоскости. Обе пластины одинаковы и разделены полуволновой пластиной, нейтральные линии которой образуют угол 45° с нейтральными линиями кристаллических пластин.

Входя в первую пластину полярископа, падающий луч SI разделяется на два луча — обыкновенный луч IK и необыкновенный луч IJ . Пройдя через полуволновую пластину, луч IJ станет обыкновенным JM , а луч IK — необыкновенным KN . Оба выходящих луча параллельны; обозначим их через EO (необыкновенный E и обыкновенный O) и OE (обыкновенный O и необыкновенный E). Из-за раздвоения пучка, произведенного полярископом, поверхность падающей волны Σ разделится на две поверхности, соответствующие лучам OE

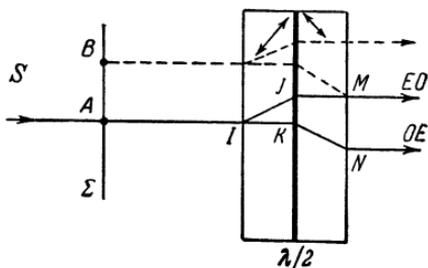


Рис. 29.

и EO . Они соответствуют двум поверхностям волн Σ_o и Σ_e , показанным на рис. 28. Рассмотрим путь луча EO . Колебания, исходящие из некой точки A волны Σ , интерферируют после прохождения через полярископ с колебаниями, исходящими из другой точки, которая вначале находилась в B на поверхности волны Σ . Можно сказать, что луч EO , выходящий из A , будет интерферировать с лучом, аналогичным OE , но выходящим из B . Расстояние AB равно линейному разведению пучков, производимому поляриiscopом.

Пусть теперь полярископ L (рис. 30) освещается протяженным источником, помещенным в S — фокусе объектива O_1 .

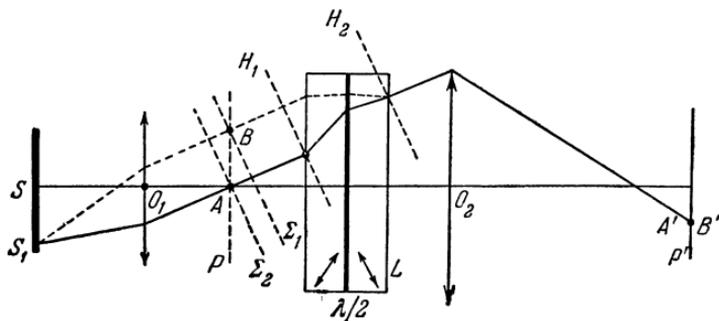


Рис. 30.

На рис. 30 поляризаторы не изображены. Возьмем две точки A и B в плоскости объекта P , изображение которого, созданное объективом O_2 , находится в P' . Пусть S_1 — некоторая точка протяженного источника. Согласно определению точек A и B луч S_1A совершает в поляриiscopе путь типа OE , а луч S_1B — путь типа EO . Они сливаются на выходе поляриiscopа, и изображения точек A и B совпадают в A' и B' . При наклонном падении света волновые поверхности Σ_2 и Σ_1 , проходящие через точки A и B , не совпадают, как в предыдущем случае на рис. 28. Источник S излучает квазимонохроматический свет, и мы хотим рассмотреть, каким образом изменяется когерентность колебаний в точках A и B в зависимости от размеров источника. Отсюда можно было бы определить, каким должен быть размер источника S для обеспечения хорошей видимости. Оптические пути от точки S_1 до плоскости волны H_1 вдоль направлений S_1A и S_1B одинаковы; одинаковы и пути от точки A' (или B') до плоскости волны H_2 . Разность хода создается поляриiscopом на

участке между H_1 и H_2 (полосы равного наклона полярископа).

Колебания, испущенные атомом S_1 , в момент излучения можно представить в виде

$$a_i(t) \exp [i2\pi\nu_0 t], \quad (2.66)$$

где индекс i указывает номер атома, ν_0 — средняя частота цуга. Колебания, достигающие A' (или B') по путям S_1AA' и S_1BB' , запишутся следующим образом:

$$\dot{a}_i(t) \exp [i(2\pi\nu_0 t - \varphi_A)], \quad (2.67)$$

$$a_i(t) \exp [i(2\pi\nu_0 t - \varphi_B)], \quad (2.68)$$

где φ_A — изменение фазы при прохождении излучения через полярископ на пути S_1AA' , а φ_B — изменение этой фазы на пути S_1BB' . В обоих выражениях $a_i(t)$ одинаково, так как в отсутствие полярископа пути равны; кроме того, можно предположить, что направления колебаний в падающей волне образуют углы 45° с нейтральными линиями пластин кристалла (амплитуды колебаний, распространяющихся по путям S_1AA' и S_1BB' , одинаковы). Разность $\varphi_A - \varphi_B$ — это создаваемая полярискомпом разность фаз двух лучей OE и EO при данном угле наклона. С точностью до множителя $e^{i2\pi\nu_0 t}$ можно записать два колебания, достигающих A' (или B') в момент t , в виде

$$a_1(t) e^{-i\varphi_A}, \quad a_2(t) e^{-i\varphi_B}. \quad (2.69)$$

Колебания в A' , пришедшие от всех атомов источника S , имеют вид

$$\begin{aligned} a_1(t) &= \sum a_i(t) e^{-i\varphi_A}, \\ a_2(t) &= \sum a_i(t) e^{-i\varphi_B}. \end{aligned} \quad (2.70)$$

Амплитуда в A' равна $a_1(t) + a_2(t)$. Но если в P помещен объект, изменяющий фазу, то амплитуда в A' станет равной

$$a_1(t) + a_2(t) e^{i\psi}, \quad \text{где } \psi = 2\pi\nu_0\theta. \quad (2.71)$$

Здесь θ — вносимое объектом запаздывание во времени, возникающее при распространении излучения по двум путям, проходящим через точки A и B . Величина ψ — вносимая объектом разность фаз колебаний (для средней частоты ν_0), приходящих от этих точек. Предполагается, что θ и ψ не меняются с углом падения лучей.

Интенсивность в A' равна (см. § 1.5)

$$I = \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{+\infty} |a_1 + a_2|^2 dt = \overline{|a_1 + a_2|^2}; \quad (2.72)$$

иначе говоря (см. (1.49)),

$$I = \overline{a_1 a_1^*} + \overline{a_2 a_2^*} + 2 \operatorname{Re} \left[\overline{a_1(t + \theta) a_2^*(t)} \right]. \quad (2.73)$$

Произведения $\overline{a_1 a_1^*}$ и $\overline{a_2 a_2^*}$ представляют собой интенсивности в точке A' в том случае, когда проходят только лучи, исходящие из A или B . Эти интенсивности равны, так как предполагается, что направление колебаний в падающей волне составляет угол в 45° с направлениями нейтральных линий в кристаллических пластинках. Мы можем написать (1.91), т. е.

$$\overline{a_1(t + \theta) a_2^*(t)} = \overline{|a_1(t + \theta) a_2^*(t)|} \exp \{i [\varphi(\theta) + \psi]\},$$

или, предполагая, что θ мало,

$$\overline{a_1(t) a_2^*(t)} = \overline{|a_1(t) a_2^*(t)|} \exp \{i [\varphi(0) + \psi]\} \quad (2.74)$$

и

$$\gamma_{12}(0) = |\gamma_{12}(0)| \exp \{i [\varphi(0) + \psi]\}. \quad (2.75)$$

Чтобы найти значение $\varphi(0)$, уберем объект, вызывающий изменение фазы, и обратимся к рассмотрению полос равного наклона полярископа. Эти полосы проектируются (виртуально) на плоскость источника S . Они прямолинейны, параллельны и находятся на равных расстояниях друг от друга (эквидистантны). Придадим источнику форму прямоугольника, две стороны которого параллельны полосам и симметричны относительно оси SO_1O_2 , которую мы считаем нормальной к полярископу L .

Колебания $a_1(t)$ и $a_2(t)$ (см. (2.70)) можно записать в виде

$$\begin{aligned} a_1(t) &= A_1 e^{i\Phi_1}, \\ a_2(t) &= A_2 e^{i\Phi_2}. \end{aligned} \quad (2.76)$$

Если центральную полосу (темная полоса при скрещенных поляризаторах) симметрично спроектировать на щель источника, то $\Phi_1 = \Phi_2$ и

$$\overline{a_1 a_2^*} = \overline{a_2 a_1^*} = \overline{A_1 A_2}. \quad (2.77)$$

Из (2.74) следует, что $\varphi(0) = 0$. Эта величина представляет собой разность хода лучей, исходящих из A и B в отсутствие объекта. Если центральная полоса симметрично проектируется на источник, то $\varphi(0) = 0$. Если первая темная полоса проектируется на щель источника, то $\varphi(0) = 2\pi$. Фаза $\varphi(0)$ задается наклоном полярископа к оси SO_1O_2 , так как предполагается, что щель источника расположена симметрично по отношению к этой оси.

Теперь установим объект в P . Из (2.14) и (2.73)–(2.75) имеем (с точностью до множителя $2\overline{a_1 a_1^*} = 2I_1$)

$$I = 1 + |\gamma_{12}(0)| \cos[\varphi(0) + \psi]. \quad (2.78)$$

Вблизи объекта, искажающего фазу ($\psi = 0$), интенсивность I' равна

$$I' = 1 + |\gamma_{12}(0)| \cos \varphi(0). \quad (2.79)$$

Отсюда контраст в изображении объекта, искажающего фазу, запишется в виде

$$\gamma = \frac{I' - I}{I'} = \frac{|\gamma_{12}(0)| \{ \cos \varphi(0) - \cos[\varphi(0) + \psi] \}}{1 + |\gamma_{12}(0)| \cos \varphi(0)}, \quad (2.80)$$

причем степень частичной когерентности $|\gamma_{12}(0)|$ выражается (2.16), т. е.

$$|\gamma_{12}(0)| = \frac{\overline{a_1(t) a_2^*(t)}}{a_1 a_1^*}. \quad (2.81)$$

Если ψ мало, то

$$\gamma = \frac{|\gamma_{12}(0)| \psi \sin \varphi(0)}{1 + |\gamma_{12}(0)| \cos \varphi(0)} \quad (2.82)$$

при $\varphi(0) = 0$ получим

$$\gamma = \frac{|\gamma_{12}(0)|}{1 + |\gamma_{12}(0)|} \frac{\psi^2}{2}. \quad (2.83)$$

При заданном значении ψ контраст максимален и излучения в точках A и B полностью когерентны, если $|\gamma_{12}(0)| = 1$.

Если $|\gamma_{12}(0)| = 0$, колебания в точках A и B некогерентны и прозрачный объект не виден.

Вернемся к соотношению (2.70). Положим $\Phi = \varphi_A - \varphi_B$; тогда

$$\overline{a_1(t) a_2^*(t)} = \sum \overline{a_i(t) a_j^*(t)} e^{i\Phi}. \quad (2.84)$$

Здесь Φ — разность фаз двух лучей OE и EO , внесенная полярископом.

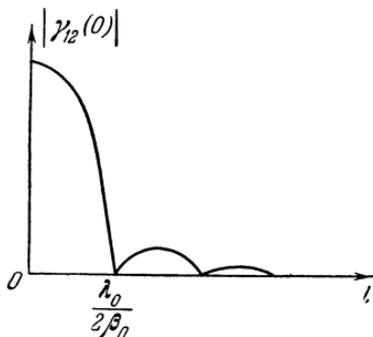
Все произведения, для которых $i \neq j$, равны нулю и остаются только члены вида

$$\overline{a_1(t) a_2^*(t)} = \sum \overline{a_i(t) a_i^*(t)} e^{i\Phi}. \quad (2.85)$$

Как и ранее (см. § 2.3), можно заменить сумму интегралом; имеем

$$\gamma_{12}(0) = \frac{\int_S \int I(\beta, \gamma) e^{i\Phi} d\beta d\gamma}{\int_S \int I(\beta, \gamma) d\beta d\gamma}. \quad (2.86)$$

Поясним значение Φ для рассмотренного нами случая. Полосы равного наклона прямолинейны, параллельны и эквидистантны; мы можем поэтому наблюдать явление с одним параметром (т. е. одномерную интерференционную картину) в направлении, перпендикулярном этим полосам. Можно показать, что с точностью до величин третьего порядка



$$\Phi = \frac{2\pi\beta l}{\lambda}, \quad (2.87)$$

где l — линейное разведение пучков, произведенное полярископом (AB на рис. 29). Рассмотрим

однородный источник. Если центральная полоса проектируется симметрично на источник, то степень комплексной когерентности можно записать в виде

$$\gamma_{12}(0) = \frac{\int_{-\beta_0}^{+\beta_0} e^{ik_0 l \beta} d\beta}{\int_{-\beta_0}^{+\beta_0} d\beta} = \frac{\sin k_0 l \beta_0}{k_0 l \beta_0}. \quad (2.88)$$

Величина $2\beta_0$ равна угловому размеру источника S , рассматриваемого из O_1 (см. рис. 28). На рис. 31 показана зависимость степени когерентности $|\gamma_{12}(0)|$ от l . Если централь-

ная полоса расположена в направлении β_1 (она проектируется в область вне источника), то

$$\Phi = \frac{2\pi (\beta - \beta_1) l}{\lambda_0} \quad (2.89)$$

и

$$\gamma_{12}(0) = \frac{\int_{-\beta_0}^{+\beta_0} \exp [ik_0 l (\beta - \beta_1)] d\beta}{\int_{-\beta_0}^{+\beta_0} d\beta}, \quad (2.90)$$

или

$$\gamma_{12}(0) = \frac{e^{-ik_0 l \beta_1} \int_{-\beta_0}^{+\beta_0} e^{+ik_0 l \beta} d\beta}{\int_{-\beta_0}^{+\beta_0} d\beta} = \frac{\sin k_0 l \beta_0}{k_0 l \beta_0} e^{-ik_0 l \beta_1}. \quad (2.91)$$

Сравнивая с (2.75) (и считая, что искажающий фазу объект убран), получим

$$\varphi(0) = -k_0 l \beta_1, \quad \text{если } \frac{\sin k_0 l \beta_0}{k_0 l \beta_0} > 0,$$

$$\varphi(0) = \pi - k_0 l \beta_1, \quad \text{если } \frac{\sin k_0 l \beta_0}{k_0 l \beta_0} < 0.$$

Величину контраста объекта находим тогда из формулы (2.80).

Можно заметить, что произведение $l\beta$ представляет собой также разность хода колебаний, излученных произвольной точкой источника (увиденной из O_1 под углом β). Эти колебания приходят в две точки, расположенные в плоскости, проходящей через O_1 , и находящиеся друг от друга на расстоянии l . Следовательно, как и в общем случае, мы снова получаем, что степень комплексной когерентности колебаний, испущенных двумя точками A и B , после прохождения ими полярископа выражается через преобразования Фурье от распределения энергии, излученной источником. Для того чтобы волны из двух точек A и B оказались когерентными, l должно быть мало по сравнению с шириной центрального максимума. Полярископ толщиной $2e = 6$ мм дает линейное разделение пучков $l = 0,028$ мм. Для получения высокой степени когерентности нужно, чтобы $\lambda_0/2\beta_0$ было значительно

больше 0,028, например, чтобы $0,028 = \frac{1}{5} \frac{\lambda_0}{2\beta_0}$, т. е. $\lambda_0/2\beta_0 = 0,14$ мм. Тогда для $\lambda = 0,5$ мк угловой размер источника будет равен $2\beta_0 = 0,004$. Следовательно, щель источника должна быть очень узка. Но узкая щель сильно уменьшает светосилу системы и ухудшает качество изображения. Однако этого легко избежать, и мы увидим ниже, что, пользуясь компенсирующим устройством, можно применять весьма протяженные источники.

Чтобы объяснить, как избежать диафрагмирования, обратимся к преобразованию Фурье в формуле (2.86). Из нее видно, что при любом наклоне лучей Φ всегда должно оставаться малым. В интеграле, стоящем в числителе (2.86), тот же эффект можно получить, умножив $e^{i\Phi}$ на $e^{-i\Phi}$. На практике это означает, что перед L нужно поставить второй, идентичный первому поляризатор, компенсирующий действие первого. Это и есть принцип компенсации, который применяется во всех поляризационных интерферометрах для получения очень светосильных систем. Можно пользоваться также установкой, в которой между полярископами размещены и другие оптические элементы. В этом случае не обязательно, чтобы оба полярископа были одинаковы, и следует учитывать характеристики вмонтированных оптических элементов и их расположение относительно полярископов. Кроме того, для получения раздвоенного изображения объекта следует помещать его между полярископами.

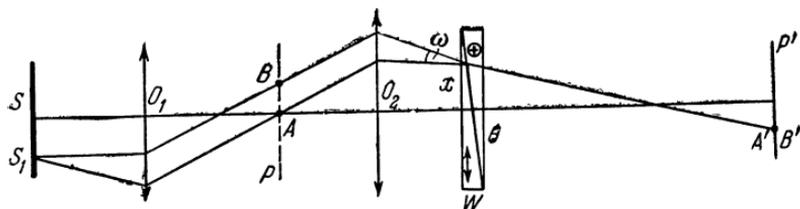


Рис. 32.

Точно такая же задача возникает при замене полярископа системой типа призмы Волластона. Призма Волластона W помещена в фокусе объектива O_2 (рис. 32), так как она симметрично разводит два луча под углом, а не смещает их параллельно друг другу. Оба луча S_1A и S_1B , соответствующие угловому разделению призмы Волластона, сливаются

после прохождения через нее. Если θ — преломляющий угол призмы Волластона, то мы имеем

$$\Phi = 2k_0(n_e - n_o) x \operatorname{tg} \theta.$$

Но $2(n_e - n_o) \operatorname{tg} \theta$ равно углу расхождения лучей после прохождения ими призмы Волластона. Если f — фокусное расстояние объектива O_2 , то $\omega = l/f$. Но отношение x/f совпадает с уже рассмотренным ранее углом β , и мы имеем $\Phi = k_0 \beta l$.

Предыдущие выводы верны и для настоящего случая. Чтобы получить высшую степень когерентности при протяженном источнике, нужно применить вторую призму Волластона, помещенную в S и идентичную W , если объективы O_1 и O_2 идентичны.

Замечание. В случае интерферометра Майкельсона получается выражение, аналогичное (2.86). Здесь Φ представляет собой разность хода, созданную интерферометром.

§ 2.7. Некогерентные протяженные источники когерентного излучения

Выводы § 2.2 позволяют представить себе, каким образом протяженный некогерентный источник может испускать когерентное излучение.

Рассмотрим протяженный некогерентный однородный источник S (рис. 33), излучающий квазимонохроматический свет. Поместим перед ним решетку R , например, с вертикальными штрихами. Осветим нашим источником две вертикальные щели T_1 и T_2 , как в опыте Юнга. Для того чтобы щели T_1 и T_2 дали контрастные полосы на экране E_2 , излучение, приходящее на эти щели, должно быть максимально когерентным. Распределение степени когерентности излучения в плоскости E_1 определяется преобразованием Фурье от распределения энергии источника S . Но поскольку мы помещаем перед S решетку, то распределение энергии источника задается структурой самой решетки. Преобразование Фурье описывает амплитуду излучения, дифрагировавшего на решетке. Мы получим, следовательно, ряд пиков — центральное изображение и дифракционные максимумы, создаваемые решеткой, расстояния между которыми зависят от периода решетки и от расстояния между R и E_1 . Само собой разумеется, что реально в плоскости E_1 , однородно освещенной источником S , перед которым помещена решетка R

(S — протяженный некогерентный источник), спектры не существуют. Но эти фиктивные спектры представляют распределение степени когерентности в плоскости E_1 .

Совместим с T_2 «центральное изображение когерентности» (оно соответствует тому, что было бы прямым изображением источника, если бы решетка R была освещена когерентным светом). Если в T_1 (справа или слева от T_2) попадает первый «пик когерентности» (это было бы положением

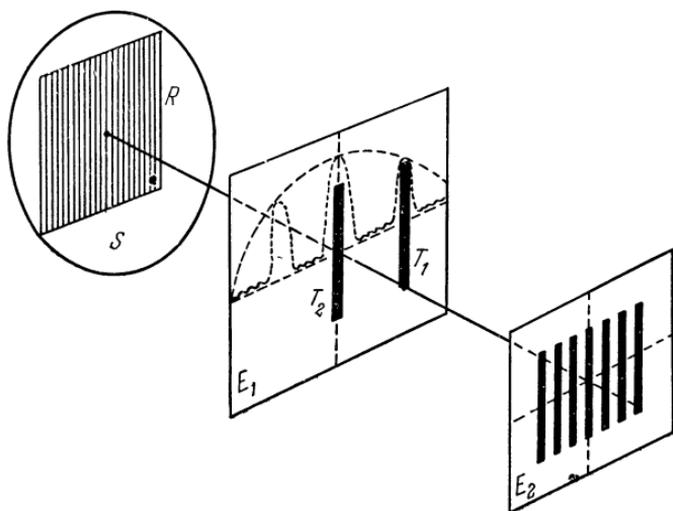


Рис. 33.

первого спектра, если бы решетка была освещена когерентным светом), то колебания в T_1 и T_2 когерентны, так как разница в высоте соответствующих пиков невелика. При этих условиях полосы Юнга будут очень контрастными на экране E_2 и, кроме того, очень яркими, так как используется протяженный источник.

Если приблизить T_1 к T_2 , то соответствующее этим щелям изображение уже не будет когерентным, так как T_1 выйдет за пределы «пика когерентности». Но если отодвинуть T_1 от T_2 , то мы снова получим когерентное излучение, когда T_1 попадет во второй «пик когерентности» (т. е. во второй «спектр когерентности») при условии, что его высота не будет сильно отличаться от высоты «пика», соответствующего T_2 .

Естественно, что расстояние между «пиками когерентности» зависит от длины волны, как и расстояние между дифракционными максимумами решетки. Поэтому, если при данном расстоянии $T_1 T_2$ мы получим когерентность при определенной длине волны, то при другой длине волны когерентности уже не будет, так как изменится расстояние от «пиков» до «центрального изображения». Поэтому при большом источнике S полосы Юнга на экране E_2 можно наблюдать

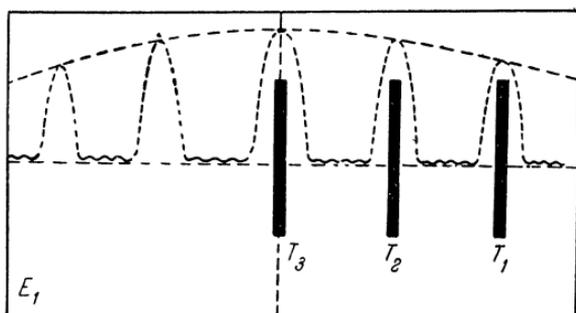


Рис. 34.

лишь тогда, когда источник излучает квазимонохроматический свет.

Рассмотрим, вслед за Маршалем, эксперимент Ваиссала—Цернике с тремя щелями. На рис. 34 изображена плоскость E_1 , в которой проделаны три щели T_1 , T_2 и T_3 . Поля в этих щелях, освещенных тем же источником, что и в предыдущем случае (решетка помещена перед протяженным источником S), будут когерентны, если расстояния между щелями таковы, что на T_3 приходится «центральное изображение когерентности», а в T_1 и T_2 попадают два первых «пика когерентности» (с одной и той же стороны от центрального пика). Кроме того, нужно, чтобы высота всех трех пиков была почти одинакова. Как и в опыте Юнга, эти щели освещены протяженным источником квазимонохроматического света и наблюдаемые картины оказываются чрезвычайно яркими.

ГЛАВА III

ВЛИЯНИЕ ВРЕМЕННОЙ КОГЕРЕНТНОСТИ НА ЯВЛЕНИЯ ДИФРАКЦИИ

§ 3.1. Точечный источник. Явления с одним параметром

Рассмотрим точечный источник некогерентного света, излучающий со средней частотой ν_0 . Излученный цуг как функцию времени можно представить в виде

$$V(t) = a(t) e^{i2\pi\nu_0 t}, \quad (3.1)$$

где $a(t)$ — комплексная величина. Мы хотим найти структуру изображения точечного источника, полученного при помощи

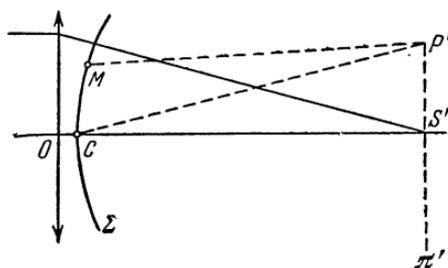


Рис. 35.

идеального ахроматического объектива (например, зеркального). Если выражение (3.1) описывает волну в момент t , когда она из какой-то точки M волновой поверхности Σ (рис. 35) приходит в P' , то волну, пришедшую из точки C в ту же точку P' плоскости π' , в которой лежит геометри-

ческое изображение S' источника, можно написать в виде

$$V(t + \theta) = \int v(\nu) e^{i2\pi\nu t} e^{i2\pi\nu\theta} d\nu, \quad (3.2)$$

где $v(\nu)$ — спектр колебания в P' , а θ — разность времен, необходимых излучению, чтобы из точек M и C (центр

волны) прийти в P' . Рассматривая картину в точках, расположенных вдоль оси $S'z'$ (рис. 36), получаем

$$\theta = \frac{CP' - MP'}{c} = \frac{\gamma' z'}{c}, \quad (3.3)$$

где c — скорость света *).

Поясним значение средней частоты ν_0 . Полагая

$$a(t + \theta) = \int v(\nu) \exp \{i2\pi[(\nu - \nu_0)t + \nu\theta]\} d\nu, \quad (3.4)$$

имеем

$$V(t + \theta) = a(t + \theta) e^{i2\pi\nu_0 t} = a(t + \theta) e^{i\omega_0 t}. \quad (3.5)$$

Если ν остается близкой к ν_0 , то $a(t + \theta)$ меняется медленно по сравнению с изменением $e^{i2\pi\nu_0 t}$ (θ постоянна для

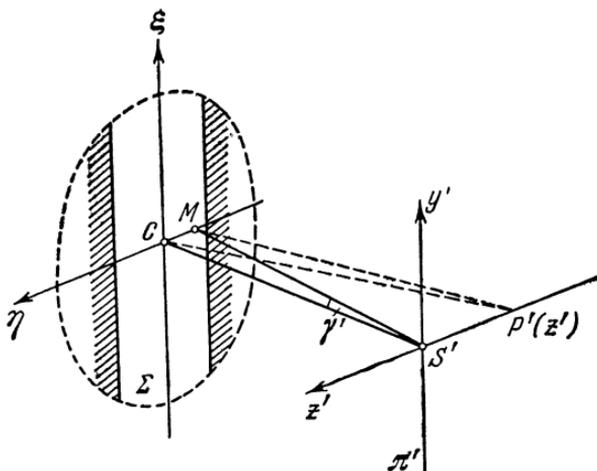


Рис. 36.

заданной точки P') и источник излучает квазимонохроматический свет. В случае строго монохроматического света амплитуда в P' выражается формулой

$$f(z') = \int F(\gamma') \exp [i(\omega_0 t - MP')] d\gamma'. \quad (3.6)$$

*) Формула (3.3) выводится аналогично формуле (2.37). Учитывая, что $\xi = 0$, имеем $CP' - MP' = \frac{z'\eta}{R} - \frac{\eta^2}{2R}$. Поскольку $\eta \ll z'$, членом с η^2 можно пренебречь. Заменяя $\frac{\eta}{R} = \gamma'$, находим (3.3) (Прим. ред.).

$F(\gamma')$ представляет собой распределение амплитуды по волновой поверхности (явление с одним параметром).

Если источник излучает квазимонохроматический свет, то следует воспользоваться выражением (3.5) и амплитуда в точке P' в момент времени t примет вид

$$f(z', t) = \int a(t + \theta) F(\gamma') \exp[i(\omega_0 t - MP')] d\gamma'. \quad (3.7)$$

Применение принципа Гюйгенса для случая немонохроматического света приводит к появлению члена, зависящего от производной по времени комплексной амплитуды $a(t)$. Для того чтобы избежать затруднений при рассмотрении концов цугов, можно заменить разрывы на концах постепенным уменьшением величины $a(t)$ в течение промежутка времени Δt , малого по сравнению с длительностью цугов. При этом формула (3.7) удовлетворяет принципу Гюйгенса с приемлемой точностью, если длительность цугов волн достаточно велика по сравнению с периодом. Начиная отсчет фаз с фазы колебания, пришедшего в точку P' из точки C , получим

$$f(z', t) = \int a\left(t + \frac{\gamma' z'}{c}\right) F(\gamma') e^{ik_0 \gamma' z'} d\gamma', \quad (3.8)$$

так как

$$\frac{2\pi}{\lambda_0} (CP' - MP') = k_0 \gamma' z'. \quad (3.9)$$

Интенсивность в точке P' имеет вид

$$I(z') = \overline{f(z', t) f^*(z', t)}. \quad (3.10)$$

Тогда в соответствии с (3.8) найдем

$$\begin{aligned} f(z', t) f^*(z', t) &= \\ &= \int a\left(t + \frac{\gamma'_1 z'}{c}\right) F(\gamma'_1) \exp[ik_0 \gamma'_1 z'] d\gamma'_1 \times \\ &\times \int a^*\left(t + \frac{\gamma'_2 z'}{c}\right) F^*(\gamma'_2) \exp[-ik_0 \gamma'_2 z'] d\gamma'_2. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Полагая $\gamma'_d = \gamma'_1 - \gamma'_2$, можем написать

$$\overline{a\left(t + \frac{\gamma'_1 z'}{c}\right) a^*\left(t + \frac{\gamma'_2 z'}{c}\right)} = \overline{a(t) a^*\left(t - \frac{\gamma'_d z'}{c}\right)} = A\left(\frac{\gamma'_d z'}{c}\right) \quad (3.12)$$

и

$$F(\gamma'_1) F^*(\gamma'_2) = F(\gamma'_1) F^*(\gamma'_1 - \gamma'_d).$$

Так как усреднение относится только к переменным членам, зависящим от времени, то

$$I(z') = \int \int A \left(\frac{\gamma'_d z'}{c} \right) F(\gamma'_1) F^*(\gamma'_1 - \gamma'_d) \times \\ \times \exp [ik_0 \gamma'_d z'] d\gamma'_1 d\gamma'_d. \quad (3.13)$$

Заменим обозначение γ'_1 на γ' и положим

$$D(\gamma'_d) = \int F(\gamma') F^*(\gamma' - \gamma'_d) d\gamma'. \quad (3.14)$$

Здесь $D(\gamma'_d)$ — автокорреляционная функция величины $F(\gamma')$. Тогда интенсивность в точке P' равна

$$I(z') = \int D(\gamma'_d) A \left(\frac{\gamma'_d z'}{c} \right) \exp [ik_0 \gamma'_d z'] d\gamma'_d. \quad (3.15)$$

Если свет строго монохроматичен, то цуги волн бесконечно длинны и $A \left(\frac{\gamma'_d z'}{c} \right) = 1$; тогда

$$I(z') = \int D(\gamma'_d) \exp [ik_0 \gamma'_d z'] d\gamma'_d. \quad (3.16)$$

Интенсивность в точке P' равна преобразованию Фурье от автокорреляционной функции для $F(\gamma')$, и мы снова приходим к классическому результату.

§ 3.2. Дифракционное изображение щели

Из схемы на рис. 37 видно, что

$$F(\gamma') = 1 \quad \text{для} \quad -\gamma'_0 < \gamma' < \gamma'_0, \\ F(\gamma') = 0 \quad \text{для} \quad |\gamma'| > \gamma'_0.$$

Так как $F(\gamma')$ — действительная величина, то согласно формуле (3.14) $D(\gamma'_d)$ будет представлена участком AB , общим для обеих щелей шириной $2\gamma'_0$ (рис. 38), смещенных друг относительно друга на величину γ'_d .

Будем считать, что свет, излученный источником, представляет собой ограниченные цуги синусоидальных волн частотой ν и продолжительностью τ . Для каждого цуга в

течение времени τ комплексная амплитуда постоянна, т. е.

$$a(t) = 1 \quad \text{для} \quad -\frac{\tau}{2} < t < \frac{\tau}{2},$$

$$a(t) = 0 \quad \text{для} \quad |t| > \frac{\tau}{2}.$$

Спектр, излучаемый источником, выражается преобразованием Фурье $v(\nu)$ от $a(t)$, т. е.

$$v(\nu) = \frac{\sin \pi (\nu - \nu_0) \tau}{\pi (\nu - \nu_0) \tau}.$$

Так как $a(t)$ постоянно, то

$$A\left(\frac{\gamma'_d z'}{c}\right) = 1 - \frac{|\gamma'_d z'|}{c\tau}. \quad (3.17)$$

$\frac{|\gamma'_d z'|}{c}$ представляет собой время θ_d , которое должно быть меньше τ , чтобы $A\left(\frac{\gamma'_d z'}{c}\right) = A(\theta_d)$ не было равно нулю

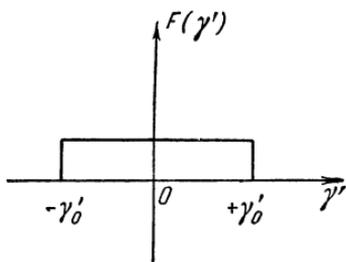


Рис. 37.

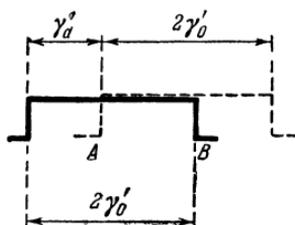


Рис. 38.

(рис. 39). Функция $A(\theta_d)$ называется коэффициентом временной когерентности. Он равен нулю, если $|\theta_d| > \tau$, так как в этом случае цуги не перекрываются.

Положим

$$\gamma'_d = x\gamma'_0.$$

Коэффициент временной когерентности можно записать в виде

$$A\left(\frac{\gamma'_d z'}{c}\right) = 1 - \left|x \frac{\gamma'_0 z'}{l}\right|, \quad -2 < x < 2,$$

где $l = c\tau$ — длина цугов волн. Точно так же, $D(\gamma'_d) = D(x)$

можно записать в виде (рис. 40)

$$D(\gamma'_d) = 1 - \left| \frac{x}{2} \right|, \quad -2 < x < 2.$$

Формула (3.15) дает

$$I(z') = \int_{-2}^0 \left(1 + \frac{x}{2}\right) \left(1 + x \frac{\gamma'_0 z'}{l}\right) \exp[ik_0 x \gamma'_0 z'] dx + \\ + \int_0^2 \left(1 - \frac{x}{2}\right) \left(1 - x \frac{\gamma'_0 z'}{l}\right) \exp[ik_0 x \gamma'_0 z'] dx. \quad (3.18)$$

Обозначая $Z = k_0 \gamma'_0 z'$, получим

$$I(z') = \left(\frac{\sin Z}{Z}\right)^2 + \frac{1}{k_0 l} \left(2 \frac{\cos^2 Z}{Z} - \frac{\sin 2Z}{Z^2}\right). \quad (3.19)$$

Если $\Delta\lambda$ — ширина спектра, излучаемого источником (см. (1.10)), то

$$l = \frac{\lambda_0^2}{\Delta\lambda}$$

и (3.19) запишется в виде

$$I(z') = \left(\frac{\sin Z}{Z}\right)^2 + \frac{\Delta\lambda}{\pi\lambda_0} \left(\frac{\cos^2 Z}{Z} - \frac{\sin 2Z}{2Z^2}\right). \quad (3.20)$$

Кривая I на рис. 41 представляет интенсивность дифракционного изображения щели (α — первый член в правой части

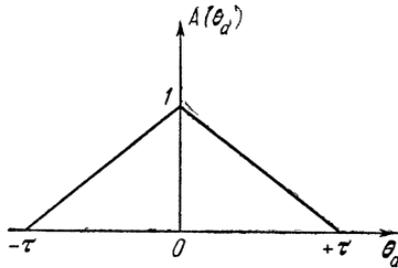


Рис. 39.

уравнения (3.20)). Кривая 2 описывает изменения члена

$$\beta = \frac{\cos^2 Z}{Z} - \frac{\sin 2Z}{2Z^2}.$$

При $Z > \pi/2$ он всегда положителен. Выражения (3.19) и (3.20) показывают, какое влияние оказывает длина пути на структуру светового поля при дифракции.

Если $l \rightarrow \infty$ (мономатический свет), то в правой части (3.20) остается только член $\left(\frac{\sin Z}{Z}\right)^2$. Когда цуги имеют конечную длину, то к ординатам кривой 1 следует прибавить

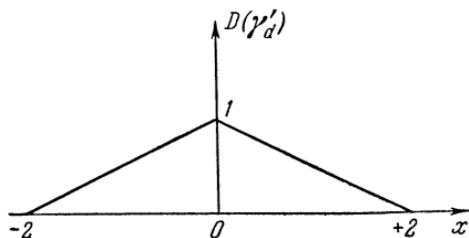


Рис. 40.

ординаты кривой 2, умноженные на соответствующую величину. Практически максимумы величины β соответствуют

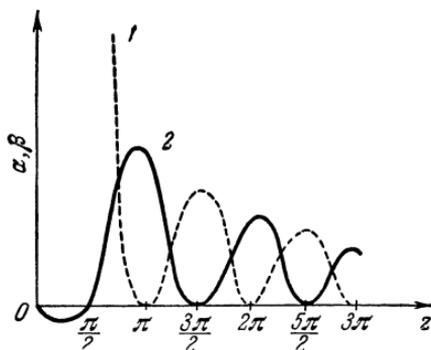


Рис. 41.

нулевым минимумам $\left(\frac{\sin Z}{Z}\right)^2$ и наоборот. Член с β стремится нивелировать интенсивности полос, окружающих центральное пятно.

§ 3.3. Явления с двумя параметрами

В этом случае амплитуда в точке P' (рис. 35) записывается в виде, аналогичном (3.8), т. е.

$$\begin{aligned}
 f(y', z', t) &= \\
 &= \int \int a\left(t + \frac{\beta' y' + \gamma' z'}{c}\right) F(\beta' \gamma') \exp[ik_0(\beta' y' + \gamma' z')] d\beta' d\gamma'.
 \end{aligned}
 \tag{3.21}$$

Пусть A — фактор временной когерентности, т. е.

$$A(\theta_d) = \overline{a(t) a^*(t - \theta_d)}, \quad (3.22)$$

где

$$\theta_d = \frac{(\beta'_1 - \beta'_2) y' + (\gamma'_1 - \gamma'_2) z'}{c}. \quad (3.23)$$

Тогда для интенсивности в точке P' имеем

$$I(y', z') = \int \int \int \int A \left[\frac{(\beta'_1 - \beta'_2) y' + (\gamma'_1 - \gamma'_2) z'}{c} \right] \times \\ \times F(\beta'_1, \gamma'_1) F(\beta'_2, \gamma'_2) \exp \{ i k_0 [(\beta'_1 - \beta'_2) y' + (\gamma'_1 - \gamma'_2) z'] \} \times \\ \times d\beta'_1 d\beta'_2 d\gamma'_1 d\gamma'_2. \quad (3.24)$$

Обозначим $\beta'_1 - \beta'_2 = \beta'_d$, $\gamma'_1 - \gamma'_2 = \gamma'_d$ и заменим β'_1, γ'_1 на β' и γ' ; тогда

$$I(y', z') = \int \int \int \int A \left(\frac{\beta'_d y' + \gamma'_d z'}{c} \right) F(\beta', \gamma') \times \\ \times F^*(\beta' - \beta'_d, \gamma' - \gamma'_d) \exp \{ i k_0 [\beta'_d y' + \gamma'_d z'] \} d\beta' d\gamma' d\beta'_d d\gamma'_d. \quad (3.25)$$

Если $D(\beta'_d, \gamma'_d)$ — автокорреляционная функция для величины $F(\beta', \gamma')$, то

$$D(\beta'_d, \gamma'_d) = \int \int F(\beta', \gamma') F^*(\beta' - \beta'_d, \gamma' - \gamma'_d) d\beta' d\gamma' \quad (3.26)$$

и окончательно найдем

$$I(y', z') = \int \int D(\beta'_d, \gamma'_d) A \left(\frac{\beta'_d y' + \gamma'_d z'}{c} \right) \times \\ \times \exp [i k_0 (\beta'_d y' + \gamma'_d z')] d\beta'_d d\gamma'_d. \quad (3.27)$$

§ 3.4. Дифракция от круглого отверстия

В случае идеального прибора с отверстием радиуса α' имеем

$$F(\beta', \gamma') = 1 \quad \text{для} \quad \beta'^2 + \gamma'^2 \leq \alpha'^2$$

и

$$F(\beta', \gamma') = 0 \quad \text{для} \quad \beta'^2 + \gamma'^2 > \alpha'^2.$$

Произведение

$$F(\beta', \gamma') F^*(\beta' - \beta'_d, \gamma' - \gamma'_d) \quad (3.28)$$

равно единице, если выполняются следующие условия:

$$\beta'^2 + \gamma'^2 \leq \alpha'^2 \quad \text{и} \quad (\beta' - \beta'_d)^2 + (\gamma' - \gamma'_d)^2 \leq \alpha'^2,$$

иначе говоря, если точка (β', γ') находится в области, общей для двух окружностей с радиусами α' и центрами в $(0, 0)$ и в (β'_d, γ'_d) . Вне этой области произведение (3.28) равно нулю.

Отсюда следует, что $D(\beta'_d, \gamma'_d)$ представляет собой область, общую для обеих окружностей радиуса α' , центры которых находятся друг от друга на расстоянии, равном

$$\alpha' u = \sqrt{\beta_d'^2 + \gamma_d'^2}. \quad (3.29)$$

Из простых геометрических соображений следует, что $D(\beta'_d, \gamma'_d)$ представляет собой функцию только переменной u и ее можно записать в виде

$$D(u) = 2\alpha'^2 \left(\arccos \frac{u}{2} - \frac{u}{4} \sqrt{1 - \frac{u^2}{4}} \right). \quad (3.30)$$

при $0 \leq u \leq 2$. Положим $y' = \frac{\lambda_0}{2\pi\alpha'} Z \cos \omega$, $z' = \frac{\lambda_0}{2\pi\alpha'} Z \sin \omega$.

По соображениям симметрии $I(y', z')$ не зависит от угла ω и может быть представлена в виде $I(Z)$. Достаточно поэтому рассмотреть точки изображения, соответствующие $\omega = 0$.

Пусть

$$\begin{aligned} \beta'_d &= \alpha' u \cos \varphi, \\ \gamma'_d &= \alpha' u \sin \varphi. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Тогда получим

$$A \left(\frac{\beta'_d y' + \gamma'_d z'}{c} \right) = A \left(\frac{Zu \cos \varphi}{k_0 c} \right). \quad (3.32)$$

Распределение интенсивности в изображении светящейся точки теперь запишется следующим образом:

$$I(Z) = \int_0^2 u \, du \int_0^{2\pi} D(u) A \left(\frac{Zu \cos \varphi}{k_0 c} \right) \exp [iZu \cos \varphi] \, d\varphi. \quad (3.33)$$

Мы видели, что в случае цугов длиной l и продолжительностью $\tau = l/c$ коэффициент временной когерентности можно записать в виде

$$A(\theta_d) = 1 - \left| \frac{\theta_d}{\tau} \right| = 1 - \left| \frac{c\theta_d}{l} \right|; \quad (3.34)$$

следовательно,

$$A \left(\frac{Zu \cos \varphi}{k_0 c} \right) = 1 - \left| \frac{Zu \cos \varphi}{k_0 l} \right|. \quad (3.35)$$

Отсюда

$$I(Z) = \int \int D(u) \exp [iZu \cos \varphi] u \, du \, d\varphi - \\ - \frac{1}{k_0 l} \int \int D(u) Zu |\cos \varphi| \exp [iZu \cos \varphi] u \, du \, d\varphi, \quad (3.36)$$

где $D(u)$ определяется (3.30). Производя замену переменной $u = 2 \cos \theta$ и вводя в $I(Z)$ такой численный множитель, чтобы $I(0) = 1$, получаем, в конечном счете, $I(Z)$ в виде

$$I(Z) = f(Z) + \frac{1}{k_0 l} g(Z). \quad (3.37)$$

Здесь

$$f(Z) = \frac{8}{\pi^2} \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} (2\theta - \sin 2\theta) \cos (2Z \cos \theta \cos \varphi) \sin 2\theta \, d\theta \, d\varphi, \quad (3.38)$$

$$g(Z) = - \frac{8}{\pi^2} \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} 2Z \cos \theta \cos \varphi (2\theta - \sin 2\theta) \times \\ \times \cos (2Z \cos \theta \cos \varphi) \sin 2\theta \, d\theta \, d\varphi. \quad (3.39)$$

Первый интеграл приводит к хорошо известному выражению

$$f(Z) = \left[\frac{2J_1(Z)}{Z} \right]^2. \quad (3.40)$$

Значения функции $g(Z)$ можно найти численно. Они были получены методом Гаусса при помощи электронной вычислительной машины САВ 500.

Были найдены следующие значения:

Z	$g(Z)$	Z	$g(Z)$	Z	$g(Z)$
0	0	4,0	0,4687	7,5	0,1761
0,5	-0,2563	4,5	0,2815	8,0	0,1247
1,0	-0,3443	5,0	0,1640	8,5	0,1012
1,5	-0,1956	5,5	0,1467	9,0	0,1105
2,0	+0,1216	6,0	0,1903	9,5	0,1319
2,5	0,4490	6,5	0,2295	10,0	0,1398
3,0	0,6366	7,0	0,2230	10,5	0,1250
3,5	0,6256				

Кривая 1 на рис. 42 описывает интенсивность дифракционного изображения круглого отверстия для случая строго монохроматического света (первый член $f(Z)$, определяемый (3.40)). Она называется распределением Эйри. Кривая 2

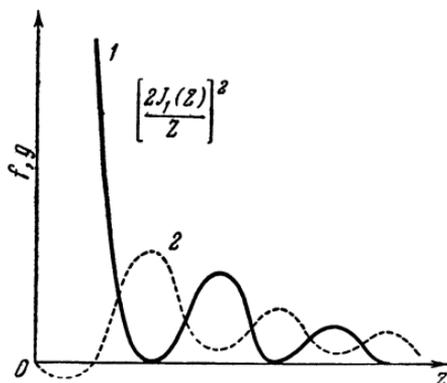


Рис. 42.

показывает изменения функции $g(Z)$. В максимумах и нулевых минимумах функции Эйри для $g(Z)$ получены следующие значения:

Z	$g(Z)$	Z	$g(Z)$
3,832 (мин.)	+0,5309	8,417 (макс.)	+0,1026
5,135 (макс.)	0,1501	10,174 (мин.)	0,1370
7,016 (мин.)	0,2220	11,620 (макс.)	0,0781

Возьмем для примера $l = 10\lambda_0$. При $g(Z) = 0,5309$ получаем

$$\frac{1}{k_0 l} g(Z) = 0,008.$$

Следовательно, первый нулевой минимум функции Эйри заменится минимумом, интенсивность которого составляет примерно 1% от интенсивности центрального максимума, а этот эффект уже нельзя считать пренебрежимо малым.

БИБЛИОГРАФИЯ¹⁾

1. Книги по оптике, в которых рассматриваются вопросы когерентности

*Г. С. Горелик, Колебания и волны, Гостехиздат, М., 1950, гл. X.

А. Марешаль, М. Франсон, Структура оптического изображения, «Мир», М., 1964.

Р. Дитчберн, Физическая оптика, «Наука», М., 1965.

*О. Нейл, Введение в статистическую оптику, «Мир», 1966.

*Дж. Струок, Введение в когерентную оптику и голографию, «Мир», 1967.

М. Борн, Е. Вольф, Principles of optics, Pergamon Press, Lnd, 1959.

Е. Н. Линфут, Recent advances in optics, Oxford Univ. Press, Lnd, 1955.

М. J. Веган, G. B. Паррент, Theory of partial coherence, Prentice Hall, Intern. Ser. in Physics, 1964.

2. Статьи по общей теории когерентности в оптике

F. Zernike, The concept of degree of coherence and its application to optical problems, *Physica* 5, 785 (1938). Diffraction and optical image formation, *Proc. Phys. Soc.* 61, 158 (1948). Degré de cohérence et méthode du fond cohérent, *Rev. d'Optique* 27, 713 (1948).

Н. Н. Хопкинс, The concept of partial coherence in optics, *Proc. Roy. Soc. A*208, 263 (1951). On the diffraction theory of optical images, *Proc. Roy. Soc. A*217, 408 (1953). Applications of coherence theory in microscopy and interferometry, *J. Opt. Soc. Amer.* 47, 508 (1957).

P. M. Duffieux, La cohérence partielle et les fonctions de transmission, *Rev. d'Optique* 32, 129 (1953).

A. Blanc-Lapierre, P. Dumontet, Sur la notion de cohérence en optique, *C. R. Acad. Sci.* 238, 1005 (1954). La notion de cohérence en optique, *Rev. d'Optique* 34, 1 (1955).

P. Dumontet, Sur la correspondance objet image en optique, *Optica Acta* 1, 53 (1955). La correspondance objet image en optique, *Publ. Sci. Univ. Alger* B1, 33 (1955); 2, 203 (1956).

¹⁾ Книги, отмеченные звездочкой, добавлены редактором перевода.

E. Wolf, A macroscopic theory of interference and diffraction of light from finite sources, *Proc. Roy. Soc.* **A225**, 96 (1954); **A230**, 246 (1955) Optics in terms of observable quantities, *Nuovo Cimento* **12**, 884 (1954).

W. H. Steel, Scalar diffraction in terms of coherence, *Proc. Roy. Soc.* **A249**, 574 (1959).

G. L. Rogers, The process of image formation as the retransformation of the partial coherence pattern of the object, *Proc. Phys. Soc.* **81**, 323 (1963).

G. B. Parrent Jr., Studies in the theory of partial coherence, *Optica Acta* **6**, 285 (1959). On the propagation of mutual coherence, *J. Opt. Soc. Amer.* **49**, 787 (1959).

L. Mandel, E. Wolf, Some properties of coherent light, *J. Opt. Soc. Amer.* **51**, 815 (1961).

H. Gamo, Intensity matrix and degree of coherence, *J. Opt. Soc. Amer.* **47**, 976 (1957).

J. Perina, Une théorie covariante générale des images optiques avec emploi des groupes de Lie, *Optica Acta* **10**, 333 (1963).

3. Пространственная когерентность в изображении светового источника

L. R. Baker, The effect of source size in the coherence of an illuminating wave, *Proc. Phys. Soc.* **B66**, 975 (1953).

J. Tsujiuchi, Influence de l'aberration du condenseur sur l'image formée par un microscope, *Rev. d'Optique* **38**, 57 (1959).

S. C. Som, On partial coherence and the concept of effective source as used in instrument optics, *Optica Acta* **10**, 179 (1963).

4. Явления интерференции и дифракции и их связь со степенью когерентности

B. J. Thompson, E. Wolf, Two-beam interference with partially coherent light, *J. Opt. Soc. Amer.* **47**, 895 (1957).

B. J. Thompson, Illustration of the phase change in two-beam interference with partially coherent light, *J. Opt. Soc. Amer.* **48**, 95 (1958).

A. Lohmann, Grating diffraction spectra as coherent light sources for two- or three-beam interferometry, *Optica Acta* **9**, 1 (1962).

A. Marechal, O. Dupuy, M. Renault, Méthode de mesure de très faibles chemins optiques, *Optica Acta* **9**, 47 (1962).

G. B. Parrent Jr., T. J. Skinner Diffraction of partially coherent light by a plane aperture, *Optica Acta* **8**, 93 (1961).

5. Расчет эффектов когерентности в оптических приборах

А. Специальные методы расчетов

G. Menzel, Die Darstellung verschiedener Phasenkontrast-Verfahren in der optischen Übertragungstheorie, *Optik* **15**, 460 (1958).

H. Hauser, Optische Übertragung bei partiell-kohärenter Beleuchtung, *Optica Acta* **9**, 121 (1962).

S. Slansky, A. Marechal, Images en éclairage partiellement cohérent dans le cas de faibles contrastes, *C. R. Acad. Sci.* **250**, 4132 (1960).

Б. Явления аберрации при частично когерентном освещении

W. H. Steel, Effect of small aberrations on the images of partially coherent objects, *J. Opt. Soc. Amer.* **47**, 405 (1957).

S. Slansky, Images partiellement cohérentes de faible contraste, *Optica Acta* **9**, 277 (1962).

В. Влияние степени когерентности на изображение некоторых объектов

H. H. Hopkins, P. M. Barham, The influence of the condenser on microscopic resolution, *Proc. Phys. Soc.* **B63**, 737 (1950)

A. M. Goodbody, The influence of condenser aperture on the resolution of a pair of parallel lines, *Proc. Phys. Soc.* **B70**, 361 (1957).

M. Françon, A. Saez, Étude du pouvoir séparateur du microscope à contraste de phase. Le contraste de phase et le contraste par interférences, p. 98, Ed. Revue d'Optique, P. 1952.

G. Nomarski, Mme Rousseau-Gaudeix, Influence de l'éclairage semi-cohérent sur la limite de séparation dans le cas d'une source annulaire, *J. de Phys.* **16**, 13S (1955).

W. H. Steel, The defocused image of sinusoidal gratings, *Optica Acta* **3**, 65 (1956).

S. Slansky, Influence de la cohérence de l'éclairage sur l'image d'un point noir en présence d'un petit défaut de mise au point, *Optica Acta* **2**, 119 (1955). Images d'un disque clair ou sombre en éclairage partiellement cohérent, *Rev. d'Optique* **39**, 555 (1959).

D. Canals-Frau, Mme M. Rousseau, Influence de la cohérence de l'éclairage sur les images de quelques objets étendus opaques, *Optica Acta* **5**, 15 (1958).

H. Osterberg, L. W. Smith, Diffraction images of disk-shaped particles with Köhler illumination, *J. Opt. Soc. Amer.* **50**, 362 (1960)

M. De, S. C. Som, Diffraction images of circular openings with partially coherent illumination, *Optica Acta* **9**, 17 (1962).

6. Различные вопросы, относящиеся к когерентности световых волн

L. Mandel, Concept of cross-spectral purity in coherence theory, *J. Opt. Soc. Amer.* **51**, 1342 (1961).

T. J. Skinner, Incoherent source with an arbitrarily narrow power spectrum, *J. Opt. Soc. Amer.* **51**, 909 (1961).

M. Beran, J. Parrent jr., The mutual coherence of incoherent radiation, *Nuovo Cimento* **27**, 1049 (1963).

L. Mandel, Photon degeneracy in light from optical maser and other sources, *J. Opt. Soc. Amer.* **51**, 787 (1961).

E. Wolf, Correlation between photons in partially polarized light beams, *Proc. Phys. Soc.* **76**, 424 (1960).

7. Когерентность в радиофизике и акустике¹⁾

* Д. Ратклифф, Некоторые вопросы теории дифракции и их применение к ионосфере, в сб. «Проблемы современной физики» 10, 1957 (Физика ионосферы).

* Л. А. Чернов, Распространение волн в среде со случайными неоднородностями, Изд-во АН СССР, Москва, 1958.

* В. И. Татарский, Распространение волн в турбулентной атмосфере, «Наука», 1967.

* С. М. Рытов, Введение в статистическую радиофизику, «Наука», 1966.

* Я. С. Шифрин, Вопросы статистической теории антенн, «Сов. радио», 1967.

¹⁾ Монографии и обзоры; см. также литературу, указанную в этих источниках. (*Прим. ред.*)

26 коп.

